

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ СПИНОВЫХ ВОЛН ЗА ПОРОГОМ ИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	609
2. Параметрическая неустойчивость в ферромагнетиках	613
а) Классический гамильтонов формализм для ферромагнетиков (613). б) Уравнения движения (616). в) Порог возбуждения и механизмы ограничения амплитуды (617). г) Нелинейные восприимчивости и методы их измерения (620).	
3. Стационарное запороговое состояние. <i>S</i> -теория и ее сравнение с экспериментом	623
а) Диагональный гамильтониан и уравнения движения <i>S</i> -теории (623). б) Основное состояние. Условие внешней устойчивости (625). в) Поэтапное возбуждение волн (627). г) Нелинейные восприимчивости (630). д) Роль нелинейного затухания (633).	
4. Коллективные возбуждения и автоколебания намагниченности	636
а) Спектр коллективных колебаний (636). б) Резонансное возбуждение коллективных колебаний (639). в) Автоколебания намагниченности (640).	
5. Другие проблемы турбулентности спиновых волн	645
а) Влияние случайных неоднородностей (645). б) Зарождение и тонкая структура параметрической турбулентности (647). в) Сильная турбулентность и самофокусировка узких пакетов параметрических волн (650).	
6. Заключение	651
Цитированная литература	653

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие усилился интерес к явлениям, происходящим в нелинейных средах при возбуждении и взаимодействии в них волн конечной амплитуды (см., например, обзор ¹). Можно говорить даже о появлении новой физической дисциплины — физики волн в нелинейных средах, рассматривающей с единой точки зрения волновые процессы в плазме, в ферромагнетиках, в гидродинамике и включающей в себя большую часть нелинейной оптики. Очень часто в нелинейных средах осуществляется ситуация, когда возбуждены и вовлечены во взаимодействие одновременно многие некогерентные колебательные степени свободы, причем распределение энергии по ним таково, что система ни в каком смысле не близка к состоянию термодинамического равновесия.

Такие ситуации, требующие для своего описания статистических методов, принципиально, однако, не сводимых к традиционным методам статистической физики, можно условно объединять под понятием «волновая турбулентность». Если при этом фазы отдельных волн можно считать статистически независимыми (как минимум для этого нужно, чтобы уровень нелинейности был мал), мы будем говорить о слабой, а в противном случае — о сильной турбулентности. «Классическая» гидродинамическая

турбулентность является с этой точки зрения предельно сильной. Определенное таким образом понятие «волновая турбулентность» (как слабая, так и сильная) объединяет множество разнообразных физических явлений, систематическое изучение которых только начинается.

Волновая турбулентность возникает обычно как результат развития в среде того или иного типа неустойчивости. Настоящая статья содержит обзор теоретических и экспериментальных результатов по одному типу слабой волновой турбулентности, являющейся результатом развития в среде параметрической неустойчивости (параметрического резонанса). Для этого типа турбулентности характерно, что в простейшем варианте задача о его описании является чисто динамической, и ее решение может быть далеко продвинуто. Обзор охватывает главным образом работы авторов, другие работы отражены лишь в той мере, в какой они затрагивают основные физические представления, развитые в обзоре.

Параметрическая неустойчивость возникает при периодическом изменении во времени параметров среды или при распространении в ней монохроматических волн большой амплитуды. Поскольку все описанные в обзоре экспериментальные результаты относятся к параметрическому возбуждению спиновых волн в ферромагнетиках, мы включили слова «спиновые волны» в название статьи, хотя турбулентность этого типа может быть реализована в антиферромагнетиках, в плазме, на поверхности жидкости и в других средах.

Явление параметрического резонанса для осциллятора с одной степенью свободы было открыто в конце XIX века (опыт Мельде) и объяснено Рэлеем². В 20-е годы нашего века параметрический резонанс интенсивно изучался в связи с задачами нарождающейся радиотехники. В это время были построены первые параметрические генераторы и усилители и в основном завершена (главным образом в работах Л. И. Мандельштама и его школы) нелинейная теория параметрического резонанса в системах с небольшим числом степеней свободы.

Вопрос о параметрическом резонансе в непрерывной среде возник в 50-е годы нашего века в связи с опытами Бломбергена, Деймона и Уанга³ по ферромагнитному резонансу при больших уровнях мощности.

В этих опытах было обнаружено «дополнительное» (по отношению к случаю малых амплитуд) поглощение энергии однородной прецессии намагниченности, имеющее по амплитуде резко выраженный пороговый характер.

Сул⁴ объяснил это явление как параметрическую неустойчивость однородной прецессии по отношению к возбуждению пары спиновых волн с частотами ω_1 , ω_2 и волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ и впервые сформулировал условия параметрического резонанса в непрерывной среде. В отличие от известного условия параметрического резонанса для осциллятора $n\omega_p = 2\omega$, они имеют вид

$$n\omega_p = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0; \quad (1.1)$$

здесь ω_p — частота однородной прецессии. Поскольку $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$, при параметрической неустойчивости рождаются пары волн с равными и противоположными волновыми векторами. Число n определяет «порядок» неустойчивости.

В 1960 г. Моргенталлером⁵ и независимо Шлеманом, Грином и Милано⁶ было предсказано (а последними и обнаружено экспериментально) явление «параллельной накачки» — параметрического возбуждения спиновых волн переменным магнитным полем с поляризацией, параллельной намагниченности. В последующие годы параллельная накачка стала одним из основных способов генерации спиновых волн в ферромагнетиках.

С начала шестидесятых годов началось изучение параметрических неустойчивостей в плазме и в нелинейной оптике. В 1962 г. Ораевский и Сагдеев⁷ построили (на примере лэнгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме) теорию распадной неустойчивости (первого порядка) монохроматической волны конечной амплитуды в нелинейной среде. Эта неустойчивость приводит, если исходная волна имеет частоту ω и волновой вектор $\mathbf{k}$, к возбуждению пары волн, частоты и волновые векторы которых удовлетворяют условиям

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (1.2)$$

Условия (1.2) представляют собой очевидное обобщение условий (1.1) при $n = 1$ для параметрической неустойчивости первого порядка. Эту неустойчивость можно трактовать так же, как когерентный распад квантов исходной волны $(\mathbf{k}, \omega)$ на пары квантов $(\mathbf{k}_1\omega_1, \mathbf{k}_2\omega_2)$, а соотношения (1.2) — как законы сохранения при этом распаде.

В те же годы в оптике были предсказаны и обнаружены в эксперименте явления вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) и вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ), представляющие собой распадные неустойчивости электромагнитной волны с возбуждением другой электромагнитной волны и оптических (в случае ВКР) или акустических (в случае ВРМБ) фононов (см., например,⁸). Условия (1.2) получили в нелинейной оптике название условий синхронизма.

В последующие годы было опубликовано значительное количество работ по параметрическим неустойчивостям в непрерывных средах (см. обзор⁹). В частности, была изучена, например, параметрическая неустойчивость однородного электрического поля в плазме¹⁰, распадная неустойчивость второго порядка волн конечной амплитуды¹¹, неустойчивость волн на поверхности жидкости¹²⁻¹⁴. В настоящее время линейную теорию параметрических неустойчивостей в однородных непрерывных средах можно считать в общих чертах законченной.

Иначе обстоит дело с нелинейной теорией. Ясно, что в результате развития параметрической неустойчивости в непрерывной среде (если размеры системы достаточно велики по сравнению с длиной возбуждающихся волн) возникает волновая турбулентность. Однако характер этой турбулентности существенно зависит от конкретной ситуации — вида закона дисперсии волн, нелинейных и диссипативных свойств среды, которые в разных случаях совершенно различны, так что вряд ли можно надеяться построить общую теорию волновой турбулентности. В ряде случаев (например, при ВКР и ВРМБ входящей в полупространство электромагнитной волной) турбулентность нельзя считать статистически однородной, что дополнительно затрудняет ее изучение.

Тем не менее можно выделить класс задач о параметрической турбулентности, к которым применим общий подход. Этот класс объединяет те случаи, когда накачка осуществляется пространственно-однородным полем $\mathbf{k} = 0$ или волной большой длины $k \ll k_1, k_2$ — в этих случаях турбулентность можно считать статистически однородной; требуется, кроме того, чтобы законы дисперсии волн в среде запрещали для параметрически возбуждаемых волн процессы распада первого порядка (1.2). Именно такая ситуация осуществляется в большинстве экспериментов по параметрическому возбуждению спиновых волн в ферромагнетиках. Необходимо заметить, что эти эксперименты принадлежат к числу наиболее «чистых» экспериментов в физике нелинейных волн, что объясняется относительной простотой их проведения (по сравнению, например, с плазменным или нелинейно-оптическим экспериментом), а также высокими качествами ферромагнитных монокристаллов. Особенно удобным объектом для

экспериментов является кристалл YIG — железонитриевый гранат ($\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$)^{15, 16}, обладающий во многих отношениях уникальными свойствами — полностью упорядоченной магнитной структурой, высокой степенью однородности, рекордной акустической добротностью (10^7 на частоте 10^6 гц), слабым затуханием спиновых волн. Большая часть экспериментальных данных, описанных в настоящем обзоре, относится к YIG.

Экспериментальные данные о спиновой турбулентности накапливаются с начала шестидесятих годов. К этому же времени относятся и первые ее модели, авторы которых ставили прежде всего цель найти механизм, ограничивающий рост амплитуды неустойчивых спиновых волн.

Первым этапом на этом пути была уже цитировавшаяся работа Сула⁴, который показал, что при накачке спиновых волн однородной прецессией намагниченности основным механизмом ограничения является их обратное влияние на накачку, приводящее к «замораживанию» ее амплитуды на пороговом уровне. Однако попытки объяснить явления при параллельной накачке встретили значительные трудности. Привлечение способов ограничения параметрической неустойчивости, традиционных для параметрического резонанса в системах с малым числом степеней свободы — нелинейного затухания и нелинейной расстройки частоты — оказалось недостаточным; в большинстве случаев нелинейное затухание оказывается слишком слабым и чувствительным к величине постоянного магнитного поля, чтобы объяснить наблюдаемый уровень спиновых волн, нелинейная же расстройка частоты вообще не ограничивает параметрический резонанс в непрерывной среде, так как при любой амплитуде найдутся волны, перенормированные частоты которых в точности удовлетворяют условиям резонанса.

Важный шаг к пониманию спиновой турбулентности был сделан Шлеманом¹⁷, который обратил внимание на необходимость учета нелинейного взаимодействия параметрически возбуждаемых волн между собой и высказал мысль, что главный вклад в это взаимодействие вносят нелинейные процессы, удовлетворяющие условиям

$$\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{-\mathbf{k}'} \quad (1.3)$$

и не выводящие волны из параметрического резонанса. Берлейн и Ричардс¹⁸ показали, что взаимодействие этого типа необходимо учитывать при объяснении экспериментально наблюдаемых эффектов удвоения частоты спиновых волн.

В 1969 г. авторами настоящего обзора было показано¹⁹, что процессы типа (1.3) сохраняют корреляцию фаз внутри каждой параметрически возбуждаемой пары волн с противоположными волновыми векторами и приводят к самосогласованному изменению суммарной фазы волн в каждой паре. Это изменение суммарной фазы приводит к ухудшению связи спиновых волн с накачкой и, в конечном итоге, к ограничению их амплитуды. При этом возбужденными оказываются как раз те волны, перенормированные частоты которых в точности удовлетворяют условию параметрического резонанса. Такой «фазовый» механизм ограничения амплитуды волн, специфичный для сплошной среды и в чистом виде осуществляющийся только в системе предельно больших (по сравнению с длиной волны) размеров, оказался главным механизмом ограничения амплитуды спиновых волн при параллельной накачке.

Процессы типа (1.3), с учетом необходимых фазовых соотношений, удобно изучать, осуществив диагонализацию гамильтониана взаимодействия волн, аналогичную БКШ-приближению в теории сверхпроводимости. Теория, основанная на этой диагонализации²⁰, получила в дальнейшем название *S*-теории; в рамках этой теории и ее обобщений удалось

далеко продвинуться в изучении турбулентности спиновых волн, объяснить качественно многие наблюдаемые в эксперименте эффекты и получить удовлетворительное количественное согласие с экспериментом²¹⁻²⁴.

Серьезным испытанием для *S*-теории был вопрос об автоколебаниях намагниченности при параметрическом возбуждении спиновых волн. Еще в 1961 г. Хартвиком, Перессини и Вейссом²⁵ было обнаружено, что при параллельной накачке в определенных условиях наблюдается не установление стационарного режима, а колебания намагниченности относительно среднего ее значения. В последующие годы эти автоколебания интенсивно исследовались и было обнаружено, что их свойства — амплитуда и спектральный состав — весьма чувствительны ко всем параметрам эксперимента — мощности накачки, величине магнитного поля, размеру и форме образцов и т. д., что сильно затрудняло их интерпретацию. Особенно странной казалась чувствительность к кристаллографической ориентации намагниченности в YIG (кристалле со слабой кубической анизотропией). Интенсивность автоколебаний при направлении намагниченности вдоль оси $\langle 111 \rangle$ в сто раз превышает их интенсивность при направлении намагниченности по оси $\langle 100 \rangle$. Для объяснения природы автоколебаний привлекались различные механизмы (см. раздел 5 настоящего обзора), которые, однако, не смогли удовлетворительно объяснить это явление.

В рамках *S*-теории автоколебания намагниченности объясняются неустойчивостью коллективных колебаний системы параметрических спиновых волн. Их можно трактовать как «вторичную турбулентность» или «турбулентность второго звука» на фоне стационарного состояния параметрически возбужденных волн. На этом пути удалось объяснить некоторые существенные свойства автоколебаний и, в частности, их гигантскую анизотропию в кубических ферромагнетиках²⁶.

В тех случаях, когда коллективные колебания устойчивы и не приводят к автоколебаниям, они могут быть возбуждены при помощи комбинационного резонанса между накачкой и близким к ней по частоте слабым сигналом. Такой эксперимент был проделан²⁷ и показал реальность существования коллективных колебаний. В целом *S*-теория и ее развитие позволили в общих чертах понять закономерности спиновой турбулентности в ферромагнетиках, хотя в новых экспериментах, несомненно, будут обнаружены явления, которые для своего объяснения потребуют ее дальнейшего усовершенствования.

В качестве примера такого рода явлений можно привести открытое Ле-Галем, Лемайром и Серé²⁸ явление жесткого возбуждения спиновых волн в ферромагнетиках; впоследствии это явление было обнаружено и в антиферромагнетиках²⁹. *S*-теория и ее экспериментальная проверка и является основным содержанием настоящей статьи (разделы 2—4). Раздел 5 посвящен дальнейшему развитию *S*-теории, в частности, вопросам ее обоснования. В заключение обсуждаются смежные проблемы и перспективы дальнейших исследований.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

а) Классический гамильтонов формализм для ферромагнетиков. Существует несколько способов описания спин волновой системы ферромагнетиков. Наиболее разработанным является метод вторичного квантования, впервые использованный Голстейном и Примаковым в задаче о температурной зависимости намагниченности при $T \rightarrow 0$ °K³⁰. При параметрическом возбуждении магнонов их числа заполнения оказываются на много порядков больше единицы, и поэтому для описания этого явления естественно использовать классические

уравнения движения для плотности магнитного момента (см., например, ³¹):

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = g \left[\mathbf{M}, \frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}} \right], \quad (2.1)$$

где $\delta W / \delta \mathbf{M}$ — вариационная производная от плотности энергии ферромагнетика, g — гиромагнитное отношение. Впервые для анализа параметрического возбуждения спиновых волн и возникающих при этом нелинейных явлений уравнение (2.1) использовалось Сулом ⁴. Однако проблема параметрического возбуждения волн не является специфической для ферромагнетиков и для ее описания желательно использовать общий метод, применимый к широкому классу слабо взаимодействующих волновых систем. Для этой цели наиболее пригоден метод классического гамильтонова формализма; в нем исходными являются канонические уравнения движения

$$\frac{\partial a(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a^*}, \quad (2.2)$$

где $\mathcal{H}$ — функция Гамильтона среды.

В случае ферромагнетиков непосредственным вычислением можно показать ³², что уравнения (2.1) приобретают канонический вид (2.2) после замены переменных

$$M_x + iM_y = \sqrt{2gM} a \sqrt{1 - g \frac{aa^*}{M}}, \quad M_z = M - gaa^*. \quad (2.3)$$

В переменных a, a^* энергия ферромагнетика является функцией Гамильтона. Преобразования (2.3) являются классическим аналогом преобразований Голстейна — Примакова ³⁰. Применительно к рассматриваемой здесь проблеме эти преобразования впервые использовались Шлеманом ¹⁷.

В пространственно однородной среде можно существенно упростить структуру функции Гамильтона (гамильтониана), переходя к представлению плоских волн:

$$a_{\mathbf{k}} = \int a(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (2.4)$$

Поскольку при параметрическом возбуждении спиновых волн отклонение магнитного момента от равновесия является малым ($g |a|^2 \ll M$), можно разложить гамильтониан в ряд по степеням $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^*$. Квадратичная часть гамильтониана $\mathcal{H}^{(2)}$ диагональна по $\mathbf{k}$:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ A_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* + \frac{1}{2} [B_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{-\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}] \right\}.$$

Например, в кубическом ферромагнетике, намагниченном вдоль оси $\langle 111 \rangle$ или $\langle 100 \rangle$,

$$A_{\mathbf{k}} = gH - \omega_M N_z + \omega_{\text{ex}} (ak)^2 + |B_{\mathbf{k}}| + \alpha \omega_a,$$

$$B_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \omega_M \sin^2 \theta e^{2i\varphi},$$

$$\alpha = \begin{cases} -1, & \mathbf{M} \parallel \langle 100 \rangle, \\ \frac{2}{3}, & \mathbf{M} \parallel \langle 111 \rangle; \end{cases}$$

здесь $\omega_M = 4\pi gM$, H — магнитное поле, ω_{ex} — «обменная частота» ($\hbar \omega_{\text{ex}} \approx kT_c$), ω_a/g — поле кристаллографической анизотропии, θ и φ — полярный и азимутальный углы волнового вектора $\mathbf{k}$ в сферической систе-

ме координат, ось z которой ориентирована вдоль M ; N_z — размагничивающий фактор.

Дальнейшее упрощение задачи достигается линейным каноническим преобразованием от круговых переменных a_k к эллиптическим b_k ,

$$a_k = u_k b_k + v_k b_{-k}^*, \quad |u_k|^2 - |v_k|^2 = 1,$$

которое следует выбрать так, чтобы квадратичная часть гамильтониана стала диагональной:

$$u_k = \sqrt{\frac{A_k + \omega_k}{2\omega_k}}, \quad v_k = -\frac{B_k}{|B_k|} \sqrt{\frac{A_k - \omega_k}{2\omega_k}},$$

где $\omega_k = \sqrt{A_k^2 - |B_k|^2}$ — закон дисперсии спиновых волн. В этих переменных

$$\mathcal{H}^{(2)} = \sum_k \omega_k b_k b_k^*. \quad (2.5)$$

Для кубических ферромагнетиков

$$\omega_k^2 = \left[gH - \omega_M N_z + \omega_{ex} (ak)^2 + \alpha \omega_a + \omega_M \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]^2 - \frac{\omega_M^2 \sin^4 \theta}{4}. \quad (2.6)$$

Такое преобразование возможно, если $|A_k| > |B_k|$, т. е. $H > 4\pi N_z M$. В противном случае $\omega^2(0) < 0$ и ферромагнетик неустойчив относительно возникновения доменной структуры.

Очевидно, что переменные b_k подчиняются уравнениям Гамильтона:

$$\dot{b}_k = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b_k^*}.$$

Эти переменные являются нормальными переменными линейной теории и особенно удобны для исследования нелинейных проблем. Специфические «линейные» трудности, присущие исследуемой модели среды, преодолеваются один раз: при поиске переменных b_k . В этих переменных линейаризованные уравнения движения становятся тривиальными:

$$\dot{b}_k + i\omega_k b_k = 0.$$

Вся «линейная» информация, необходимая для изучения нелинейных проблем, заключена в законе дисперсии волн ω_k . Вся дополнительная информация о взаимодействии волн содержится в остальных коэффициентах разложения $\mathcal{H}$ в ряд по степеням b_k :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(2)} + \mathcal{H}^{(3)} + \mathcal{H}^{(4)} + \dots \quad (2.7)$$

Гамильтониан $\mathcal{H}^{(3)}$ описывает трехволновые процессы:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(3)} = \sum_{1, 2, 3} (V_{1, 2, 3}^* b_1^* b_2 b_3 + \text{к. с.}) \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + \\ + \frac{1}{3} \sum_{1, 2, 3} (U_{1, 2, 3}^* b_1 b_2 b_3 + \text{к. с.}) \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3), \end{aligned} \quad (2.8)$$

гамильтониан $\mathcal{H}^{(4)}$ — четырехволновые процессы:

$$\mathcal{H}^{(4)} = \frac{1}{2} \sum_{1, 2, 3, 4} W_{1, 2, 3, 4} b_1^* b_2^* b_3 b_4 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4); \quad (2.9)$$

здесь $b_1 = b_{\mathbf{k}_1}$ и т. д., $V_{1, 2, 3} = V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$. Коэффициенты $V_{1, 2, 3}$, $U_{1, 2, 3}$, $W_{1, 2, 3, 4}$ обладают симметрией относительно перестановки индексов,

стоящих по одну сторону от запятой. Из эрмитовости гамильтониана следует также

$$W_{12, 34} = W_{34, 12}^* \quad (2.10)$$

Физический смысл каждого слагаемого в гамильтониане легко понять, учитывая, что канонические переменные b_k , b_k^* являются классическими аналогами бозе-операторов. Например, слагаемое, пропорциональное $V_{1, 23}$, вместе с комплексно сопряженным слагаемым описывает процесс взаимодействия трех волн типа (1.2). В дальнейшем мы будем (если не оговорено противное) предполагать, что процессы этого типа в интересующей нас области $\mathbf{k}$ -пространства запрещены видом закона дисперсии ω_k .

При наличии внешнего источника энергии — поля накачки $h(t)$ к энергии ферромагнетика добавляется зеемановское слагаемое — Mh . Гамильтониан $\mathcal{H}_p$, соответствующий этому взаимодействию, также можно разложить в ряд по степеням b_k :

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_p^{(1)} + \mathcal{H}_p^{(2)} + \dots$$

Первое слагаемое

$$\mathcal{H}_p^{(1)} = U(h_x + ih_y)b_0 + \text{к. с.} \quad (2.11)$$

описывает хорошо известное явление ферромагнитного резонанса, состоящее в возбуждении однородной прецессии намагниченности с комплексной амплитудой b_0 поперечным магнитным полем. Следующий член разложения $\mathcal{H}_p^{(2)}$, представляющий для нас наибольший интерес, описывает параметрическое возбуждение спиновых волн продольным магнитным полем (параллельная накачка):

$$\mathcal{H}_p^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_k \mathcal{H}_{pk} = \frac{1}{2} \sum_k (h(t) V_k b_k^* b_{-k}^* + \text{к. с.}), \quad h = \frac{\hbar M}{|M|}. \quad (2.12)$$

Механизм возбуждения спиновых волн параллельным намагниченности переменным магнитным полем можно понять из простых геометрических соображений. Из-за диполь-дипольного взаимодействия и кристаллографической анизотропии намагниченность в каждой точке прецессирует по эллиптическому конусу. Так как длина вектора $\mathbf{M}$ остается постоянной, основание конуса не является плоским и возникает переменная продольная составляющая (z -компонента) вектора $\mathbf{M}$, изменяющаяся с удвоенной частотой прецессии. Ясно, что эти колебания можно возбудить с помощью магнитного поля соответствующей частоты и поляризованного вдоль оси z .

На корпускулярном языке гамильтониан (2.12) описывает распад кванта внешнего поля (с нулевым волновым вектором и энергией $\hbar\omega_p$) на два магнона с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$ и равными энергиями $\hbar\omega_k = \hbar\omega_{-\mathbf{k}} = \hbar\omega_p/2$. В гамильтониане (2.12) опущены слагаемые $\sim h(t) b_k b_k^*$, для которых не выполняются законы сохранения энергии и импульса.

Параметрическое возбуждение спиновых волн однородной прецессией намагниченности, описываемое членами вида $b_0 b_k^* b_{-k}^*$ и $b_0^2 b_k^* b_{-k}^*$ (суловские процессы первого и второго порядка), содержится в гамильтонианах $\mathcal{H}^{(3)}$ и $\mathcal{H}^{(4)}$. Следующие члены разложения $\mathcal{H}$ вида $\hbar b_1^* b_2^* b_3^*$ и т. д. описывают не интересующие нас взрывные неустойчивости спиновых волн.

б) У р а в н е н и я д в и ж е н и я. Рассмотрим ферромагнетик, помещенный в переменное магнитное поле $h(t) = h e^{-i\omega_p t}$, поляризованное вдоль намагниченности. В этом случае однородная прецессия не возбуж-

дается и гамильтониан системы имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (h V_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_p t} b_{\mathbf{k}}^* b_{-\mathbf{k}} + \text{к. с.}) + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (2.13)$$

где $\mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}^{(3)} + \mathcal{H}^{(4)}$. Пользуясь тем, что все параметрические волны имеют близкие или одинаковые частоты ($\omega_{\mathbf{k}} \approx \omega_p/2$), упростим гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_{\text{int}}$, оставив в нем только четырехволновые члены, описывающие процессы взаимодействия волн с законами сохранения

$$\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} = \omega_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}}. \quad (2.14)$$

Последнее не означает, однако, что трехволновой гамильтониан можно не учитывать вовсе. Его матричные элементы велики по отношению к четырехволновым, и поэтому, вообще говоря, следует учитывать их вклад в амплитуду четырехволновых процессов во втором порядке теории возмущений. Это приводит к перенормировке матричных элементов четырехволнового гамильтониана:

$$W_{12, 34} \rightarrow T_{12, 34} = W_{12, 34} + \text{члены порядка } |V|^2/\omega_p$$

(см., например, ³²). Для кубических ферромагнетиков оба вклада в коэффициенты $T_{12, 34}$ оказываются одного порядка величины ²². Таким образом, гамильтониан взаимодействия параметрических волн между собой следует выбрать в виде

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{12, 34} T_{12, 34} b_1^* b_2^* b_3 b_4 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4). \quad (2.15)$$

Безусловно, необходимо учитывать также взаимодействие параметрических волн с резервуаром остальных спиновых волн и фононов. Это взаимодействие приводит к затуханию параметрических волн, которое обычно учитывают феноменологически, вводя в канонические уравнения движения диссипативный член:

$$\dot{b}_{\mathbf{k}} + \gamma_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b_{\mathbf{k}}^*}. \quad (2.16)$$

Могут возникнуть сомнения в правомочности этой процедуры при описании когерентных волновых систем, в которых существенны фазовые соотношения. В работе ³³ эта процедура для параметрических волн была обоснована с помощью диаграммной техники и было показано, что декремент затухания $\gamma_{\mathbf{k}}$ в (2.16) можно вычислять с помощью обычного кинетического уравнения. Это не относится, однако, к случаю, когда затухание волн обусловлено рассеянием на неоднородностях ³⁴.

Учитывая явный вид гамильтониана (2.13), в котором слагаемое $\mathcal{H}_{\text{int}}$ определено формулой (2.15), запишем динамические уравнения (2.16) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \gamma_{\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}} \right) b_{\mathbf{k}} + i h V_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_p t} b_{-\mathbf{k}}^* = \\ = - \sum_{2, 34} T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_1}^* b_{\mathbf{k}_2}^* b_{\mathbf{k}_3} \Delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Эти уравнения являются исходными для анализа поведения спиновых волн за порогом параметрического возбуждения.

в) Порог возбуждения и механизмы ограничения амплитуды. Порог параметрического возбуждения волн непосредственно вычисляется из уравнений (2.17). В линейном приближе-

нии они распадаются на независимые пары уравнений и после исключения «быстрой» зависимости от времени

$$c_k(t) = b_k(t) e^{\frac{i\omega_p t}{2}} \quad (2.18)$$

приобретают вид

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} + \gamma_k + i \left(\omega_k - \frac{\omega_p}{2} \right) \right] c_k + i h V_k c_{-k}^* &= 0, \\ i (h V_k)^* c_k + \left[\frac{d}{dt} + \gamma_k - i \left(\omega_k - \frac{\omega_p}{2} \right) \right] c_{-k}^* &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Полагая $c_k, c_{-k}^* \sim \gamma_k$, имеем

$$V_k = -\gamma_k + \left[|h V_k|^2 - \left(\omega_k - \frac{\omega_p}{2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.20)$$

Минимальный порог, соответствующий параметрическому резонансу

$$2\omega_k = \omega_p, \quad (2.21)$$

определяется из условия

$$|h V_k| = \gamma_k, \quad (2.22)$$

имеющего простой смысл условия баланса энергии. Действительно, поток энергии W_+ , поступающий от накачки в пару волн $\pm k$, равен

$$\begin{aligned} W_+ = -\frac{\partial \mathcal{H}_{pk}}{\partial t} &= i\omega_p (h V_k c_k^* c_{-k}^* - \text{к. с.}) = \\ &= 2 |h V_k| \omega_p |c_k|^2 \sin(\tilde{\psi}_k - \psi_k); \end{aligned} \quad (2.23)$$

здесь $c_k = |c_k| e^{i\varphi_k}$, $\psi_k = \varphi_k + \varphi_{-k}$ — фаза пары, $\tilde{\psi}_k = \arg(h V_k)$. С другой стороны, энергия W_- , диссипируемая парой в единицу времени, равна

$$W_- = 2\gamma_k (\omega_k |c_k|^2 + \omega_{-k} |c_k|^2) = 2\omega_p \gamma_k |c_k|^2.$$

В точке порога $W_+ = W_-$. Наибольший поток энергии и наименьший порог неустойчивости осуществляется для пары с наиболее выгодным фазовым соотношением

$$\psi_k = \tilde{\psi}_k + \frac{\pi}{2}. \quad (2.24)$$

При этом для порога вновь возникает соотношение (2.22).

Условие параметрического резонанса, очевидно, может одновременно выполняться для большого числа пар, волновые векторы которых лежат на поверхности (2.21). Минимальный порог возбуждения h_1 имеют пары, у которых отношение $\gamma_k / |V_k|$ минимально:

$$h_1 = \min \frac{\gamma_k}{|V_k|}. \quad (2.25)$$

Например, для изотропных ферромагнетиков^{5, 6}

$$V_k = V \sin^2 \theta \cdot e^{2i\varphi} \quad (2.26)$$

(θ и φ , как и на стр. 614, — азимутальный и полярный углы в $\mathbf{k}$ -пространстве) и при $\gamma_k = \gamma$ первыми возбуждаются пары с $\theta = \pi/2$, т. е. на «экваторе» резонансной поверхности. При $|h V_k| > \gamma_k$ начинается экспоненциальный рост амплитуд пар с инкрементом (2.20), именно:

$$\begin{aligned} c_k(t) &= c_k \exp \left(V_k t - i \frac{\psi_k}{2} \right), \\ c_{-k}(t) &= c_k^* \exp \left(V_k t - i \frac{\psi_k}{2} \right), \end{aligned}$$

причем из уравнений (2.19) следует, что

$$\cos(\psi_{\mathbf{k}} - \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}) = \frac{2\omega_{\mathbf{k}} - \omega_p}{2|\hbar V_{\mathbf{k}}|}. \quad (2.27)$$

Это означает, что на линейной стадии параметрической неустойчивости устанавливается определенное соотношение между фазами волн в паре, в частности, при параметрическом резонансе (2.21) выполняются фазовые соотношения (2.24). Фазовую корреляцию волн с равными и противоположно направленными волновыми векторами по аналогии со сверхпроводимостью можно назвать «спариванием». В отличие от сверхпроводимости, физической причиной, приводящей к спариванию волн, служит накачка, выделяющая из первоначального фазового хаоса пары волн, для которых максимален инкремент неустойчивости. В дальнейшем будет показано, что на нелинейной стадии развития неустойчивости фазовая корреляция является полной. Это означает, что хотя величина $c_{\mathbf{k}}$ является случайной, величина $c_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k}}$ является динамической; при этом

$$\langle c_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k}} \rangle = c_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k}}, \quad \langle \psi_{\mathbf{k}} \rangle = \psi_{\mathbf{k}}.$$

Обсудим теперь возможные нелинейные механизмы ограничения параметрической неустойчивости. Простейшим механизмом такого рода может быть нелинейное затухание, т. е. зависимость $\gamma_{\mathbf{k}}$ от квадратов амплитуд параметрических волн $|c_{\mathbf{k}}|^2$ ^{35, 36}:

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}}(0) + \gamma_{\mathbf{k}}^{\text{нел}}(|c_{\mathbf{k}}|^2).$$

Стационарные амплитуды волны определяются известным условием баланса энергии: $\hbar V_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}}$. Для качественного анализа выберем простейшую зависимость:

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \gamma_0 + \eta \sum_{\mathbf{k}'} |c_{\mathbf{k}'}|^2.$$

Тогда

$$\sum_{\mathbf{k}'} |c_{\mathbf{k}'}|^2 = \frac{\hbar V - \gamma_0}{\eta} = \frac{V}{\eta} (\hbar - \hbar_1); \quad (2.28)$$

что же касается фаз $\psi_{\mathbf{k}}$, то они определяются из условия параметрического резонанса (2.21), т. е. сдвинуты на $\pi/2$ относительно фазы накачки в соответствии с формулой (2.24).

К сожалению, простой механизм нелинейного затухания в большинстве случаев не может объяснить экспериментально наблюдаемый уровень спиновых волн (более подробно см. раздел 3 настоящего обзора). Другие механизмы могут быть основаны на отклонении фазы возбуждаемых спиновых волн от оптимальной, при которой $\delta\psi_{\mathbf{k}} = \psi_{\mathbf{k}} - \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}$ и $\sin \delta\psi_{\mathbf{k}} = 1$. Такой, по существу, механизм был предложен Моносовым³⁷, предположившим, что в ограничении амплитуды спиновых волн существенную роль играют автоколебания намагниченности, во многих случаях наблюдаемые на опыте. Автоколебания, если они развиваются на фоне состояния с $\sin \delta\psi_{\mathbf{k}} = 1$, приводят к периодическому или квазипериодическому изменению угла $\delta\psi_{\mathbf{k}}$ и в среднем уменьшают $\sin \delta\psi_{\mathbf{k}}$ и вместе с ним поток энергии от накачки в систему спиновых волн. Фактически во многих случаях автоколебаний не возникает. Однако, даже в тех случаях, когда они присутствуют, среднее значение, вокруг которого происходят колебания фазы $\psi_{\mathbf{k}}$, отлично от $\pi/2$, и автоколебания не оказывают существенного влияния на амплитуду спиновых волн^{23, 38}.

Отклонение $\psi_{\mathbf{k}}$ от $\pi/2$ и ограничение амплитуды спиновых волн в действительности происходит за счет взаимодействия спиновых волн между

собой. Неизбежно существующая в системе параметрически возбужденных волн фазовая корреляция приводит к тому, что даже при стохастичности фаз отдельных спиновых волн в гамильтониане их взаимодействия сохраняется слагаемое, приводящее к появлению «эффективной» накачки. Это слагаемое можно учесть, произведя в линеаризованных уравнениях замену

$$hV_{k'} \rightarrow p_k = hV_k + \sum_{k'} S_{kk'} c_k c_{-k'}, \quad (2.29)$$

где $S_{kk'} = T_{k, -k; k', -k'}$. В простейшем случае, когда $V_k = V$, $\tilde{\psi}_k = 0$ и $S_{kk'} = S$, из соображений симметрии следует, что фазы всех пар равны: $\psi_k = \psi$ и

$$P = hV + S \sum_k |c_k|^2 \exp(-i\psi). \quad (2.30)$$

Рис. 1. Комплексная плоскость векторов накачки.

hV — внешняя накачка, $S \sum_k |c_k|^2 e^{-i\psi}$ — поле реакции системы пар, P — самосогласованная накачка.

P , т. е. вектор P на рис. 1 должен быть перпендикулярен к вектору $S \sum_k |c_k|^2 \exp(-i\psi)$. Из теоремы Пифагора

$$(hV)^2 = |P|^2 + S^2 \left(\sum_k |c_k|^2 \right)^2$$

и условия баланса энергии $|P| = \gamma$ следует, что суммарная амплитуда пар равна

$$\sum_k |c_k|^2 = \frac{\sqrt{(hV)^2 - \gamma^2}}{|S|}. \quad (2.31)$$

Фазу ψ также легко определить из рис. 1; именно,

$$\cos \psi = -S \frac{\sum_k |c_k|^2}{hV}, \quad \sin \psi = \frac{\gamma}{hV}. \quad (2.32)$$

Сравнивая второе равенство (2.32) с условием баланса энергии (2.22) для невзаимодействующих волн, мы видим, что спаривание волн и возникающее из-за него четырехволновое взаимодействие приводит к фазовому рассогласованию ($\sin \psi < 1$) между парами и внешней накачкой, т. е. к уменьшению потока энергии в систему.

Этот механизм ограничения, который можно назвать фазовым, играет определяющую роль при параметрическом возбуждении волн. Заметим, что в предыдущих рассуждениях предполагалось, что при любых амплитудах возбуждающиеся волны в точности удовлетворяют условиям параметрического резонанса. При наличии сдвига частот волн за счет нелинейности это возможно лишь при непрерывном спектре системы спиновых волн, поэтому фазовый механизм в чистом виде осуществляется лишь в бесконечной среде.

г) **Нелинейные восприимчивости и методы их измерения.** Наиболее распространенный метод экспериментального изучения параметрического возбуждения спиновых волн основывается на поглощении волнами энергии накачки.

Определим высокочастотную нелинейную восприимчивость ферромагнетика обычным образом:

$$M_z(\omega_p) = \chi h, \quad \chi = \chi' + i\chi''.$$

Мнимая часть восприимчивости χ'' определяет величину поглощенной мощности:

$$W = \frac{\omega_p}{2} \chi'' h^2.$$

Применяя формулу (2.23) для потока энергии, втекающей в образец из окружающего поля накачки, получим

$$\chi'' = \frac{2}{h} \sum_k |V_k| |c_k|^2 \sin(\tilde{\psi}_k - \psi_k). \quad (2.33)$$

Аналогичное выражение получается для вещественной части восприимчивости:

$$\chi' = -\frac{2}{h} \sum_k |V_k| |c_k|^2 \cos(\tilde{\psi}_k - \psi_k). \quad (2.34)$$

Поведение восприимчивостей χ' и χ'' за порогом существенно зависит от механизма ограничения амплитуды. Так, для механизма нелинейного затухания из (2.24) и (2.28) следует

$$\chi' = 0, \quad \chi'' = \frac{2V^2}{\eta} \frac{h - h_1}{h}, \quad (2.35)$$

а для фазового механизма ограничения из (2.31) и (2.32)

$$\chi' = \frac{2V^2}{S} \frac{h^2 - h_1^2}{h^2}, \quad \chi'' = \frac{2V^2}{|S|} \frac{h_1}{h^2} \sqrt{h^2 - h_1^2}. \quad (2.36)$$

Графики зависимостей $\chi'(h^2)$ и $\chi''(h^2)$ для обоих случаев показаны на рис. 2. Видно, что принципиальное различие диссипативного и фазового механизмов проявляется в поведении величины χ' ($\chi' = 0$ для диссипативного и $\chi' \sim \chi''$ для фазового механизмов). Экспериментальные результаты, которые мы подробно обсудим в следующем разделе, показывают, что вещественная восприимчивость χ' отлична от нуля и может быть порядка или даже больше, чем χ'' . Эти факты говорят в пользу фазового механизма ограничения.

Методика измерения магнитной восприимчивости в СВЧ диапазоне обычно использует реакцию высокочастотного электромагнитного резонатора на изменение состояния находящегося в нем образца. Возникающее при этом изменение добротности резонатора определяет мнимую часть восприимчивости χ'' , а изменение собственной частоты — вещественную часть χ' . По сравнению со стандартной методикой, применяемой в опытах по магнитному резонансу, методика измерений нелинейных восприимчивостей при параллельной накачке имеет ряд специфических особенностей: импульсный режим СВЧ генератора, широкая область полей, в которых наблюдается поглощение энергии, зависимость χ' и χ'' от мощности накачки. Последнее приводит к тому, что мощность генератора не является хорошей мерой амплитуды поля накачки. Поле в резонаторе более удобно

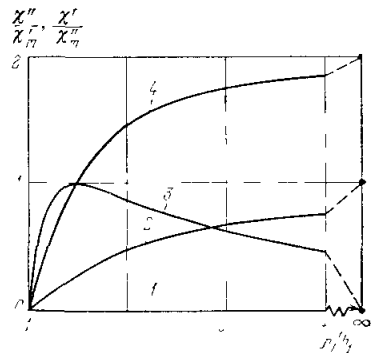


Рис. 2. Зависимости нелинейных восприимчивостей χ' и χ'' от амплитуды накачки:

1 и 2 — χ' и χ'' для механизма нелинейного затухания, 3 и 4 — χ' и χ'' для фазового механизма ограничения.

определять по мощности на выходе резонатора; это позволяет автоматически учесть эффект обратного влияния спиновых волн на накачку, который является существенным вблизи порога даже при малом коэффициенте заполнения резонатора.

Типичная схема экспериментальной установки, применяемой для изучения явления параллельной накачки, показана на рис. 3. Принцип ее действия заключается в следующем. Невозмущенный резонатор (до порога параметрического возбуждения) обычно согласовывается с волноводным трактом таким образом, чтобы коэффициент отражения от резонатора был

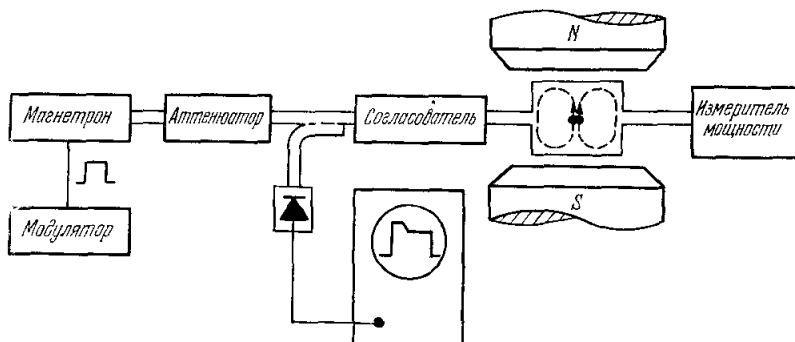


Рис. 3. Схема установки для параметрического возбуждения спиновых волн.

близким к нулю. При возбуждении спиновых волн ухудшается нагруженная добротность резонатора Q_n и изменяется его собственная частота ω_0 , что приводит к появлению отраженного сигнала, по которому можно судить о величине χ' и χ'' . Величина χ'' связана с коэффициентом отражения Γ следующей формулой:

$$\chi'' = \frac{1}{AQ_n} \frac{|\Gamma|_{\omega=\omega_0}}{1 - |\Gamma|_{\omega=\omega_0}},$$

где $A = 2\pi \int_{\text{обр}} h^2 dV / \int_{\text{рез}} h^2 dV$ — коэффициент заполнения резонатора. Для настройки в резонанс ($\omega = \omega_0$) производится небольшое изменение частоты генератора (или собственной частоты резонатора) по минимуму коэффициента отражения; величина этого изменения $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ непосредственно определяет вещественную восприимчивость. По ряду причин, главной из которых является неточность в определении коэффициента A , погрешность измерения абсолютных величин χ' и χ'' обычно составляет порядка 20–40%.

В работе ³⁹ использовалась другая методика наблюдения параллельной накачки, основанная на изменении намагниченности при параметрическом возбуждении спиновых волн. Изменение намагниченности регистрируется с помощью катушки, в которой индуцируется напряжение, пропорциональное производной по времени от M_z .

Следует также упомянуть о методике измерения слабого неравновесного электромагнитного излучения спиновых волн на частотах ω_p или $\omega_p/2$ ⁴⁰; ее интересные возможности по изучению спектральной ширины параметрических волн еще не реализованы. Подробную информацию о распределении спиновых волн в $\mathbf{k}$ -пространстве могло бы дать изучение рассеяния света и нейтронов в условиях параллельной накачки; ряд попыток, предпринятых в этом направлении ^{41–43}, до сих пор не привел к ожидаемым результатам.

3. СТАЦИОНАРНОЕ ЗАПОРОВОЕ СОСТОЯНИЕ. S-ТЕОРИЯ И ЕЕ СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

а) Д и а г о н а л ь н ы й г а м и л ь т о н и а н и у р а в н е н и я д в и ж е н и я S-те о р и и. Обсудим более подробно упрощение гамильтониана взаимодействия волн, намеченное в предыдущем разделе в связи с рассмотрением фазового механизма ограничения. Это упрощение аналогично БКШ-приближению и состоит в замене гамильтониана взаимодействия (2.15) его диагональной по парам волн $\pm k$ частью. В «медленных» переменных (2.18) диагональный гамильтониан имеет вид

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} |c_{\mathbf{k}}|^2 |c_{\mathbf{k}'}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}'} c_{-\mathbf{k}'}, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &\equiv T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^*, \\ S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &\equiv T_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}'-\mathbf{k}} = S_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} = S_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^*. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В гамильтониане $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ оставлены только члены, либо не зависящие от фаз волн вообще (первая сумма в (3.1)), либо зависящие только от суммы фаз $\psi_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}} + \varphi_{-\mathbf{k}}$ в парах. Все остальные слагаемые, зависящие от индивидуальных фаз волн (точнее, от разностей $\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'}$), опущены.

Физический смысл оставленных в (3.1) членов становится ясным из уравнения движения для амплитуд $c_{\mathbf{k}}$. Подставляя в уравнения (2.16) гамильтониан (3.1), получим

$$\left[\frac{d}{dt} + \gamma_{\mathbf{k}} + i \left(\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} - \frac{\omega_p}{2} \right) \right] c_{\mathbf{k}} + i P_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}}^* = 0. \quad (3.3)$$

Эти уравнения отличаются от линейных уравнений (2.19), описывающих параметрическую неустойчивость, только перенормировкой частоты $\omega_{\mathbf{k}} \rightarrow \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}$, возникающей из-за первой суммы в (3.1),

$$\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} + 2 \sum_{\mathbf{k}'} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} |c_{\mathbf{k}'}|^2 \quad (3.4)$$

и перенормировкой накачки (2.29), которая описывается второй суммой в (3.1).

Выбирая в уравнениях (3.4) $c_{\mathbf{k}} = |c_{\mathbf{k}}| e^{i\varphi_{\mathbf{k}}}$ и вычисляя $\frac{\partial \varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t}$, найдем соотношение $\partial/\partial t (\varphi_{\mathbf{k}} + \varphi_{-\mathbf{k}}) = 0$, демонстрирующее безразличную устойчивость разности фаз в рамках теории с диагональным гамильтонианом (3.1). Этого и следовало ожидать, так как разность фаз бегущих навстречу волн определяет пространственное положение узлов образующей стоячей волны, которая в однородном поле накачки ничем не фиксирована.

Безразличное равновесие разностей фаз приводит к тому, что они могут быть хаотизированы любым малым взаимодействием, например малыми случайными неоднородностями или неточностями формы кристалла. Причиной стохастизации фаз является и «остаточное» взаимодействие, не учтенное в диагональном гамильтониане (3.1). Впрочем, это взаимодействие приводит к некоторой корреляции разностей фаз в различных парах, однако эта корреляция вместе с недиагональными членами гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ остается малым. Подробно этот вопрос и обоснование приближения (3.1) рассмотрен в работе ³³. В этой работе показано, что приближение (3.1) пригодно вплоть до амплитуд внешнего поля $h^* \sim h_1 \sqrt{(k \partial \omega / \partial k) / \gamma}$, где h_1 — пороговое значение амплитуды внешнего поля. Для случая параллельной накачки в иттриевом гранате это дает $h^* \sim 100 h_1$.

Теорию, основанную на диагонализации гамильтониана взаимодействия до формы (3.1), мы будем называть S -теорией. В таком названии отражено определяющее влияние коэффициентов $S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ на нелинейное поведение системы параметрических волн.

В дальнейшем мы будем предполагать, что индивидуальные среды волн являются случайными и по их ансамблю произведено усреднение. При этом турбулентность описывается на языке корреляционных функций:

$$\langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^* \rangle = n_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad \langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'} \rangle = \sigma_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}').$$

Величины $n_{\mathbf{k}}$ и $\sigma_{\mathbf{k}}$ имеют размерность действия (*эрг·сек*). Уравнения для этих величин легко могут быть получены непосредственным усреднением уравнения (3.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} &= n_{\mathbf{k}} (-\gamma_{\mathbf{k}} + \text{Im } P_{\mathbf{k}}^* \sigma_{\mathbf{k}}), \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\mathbf{k}}}{\partial t} &= \sigma_{\mathbf{k}} \left(i\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} - \frac{i\omega_p}{2} - \gamma_{\mathbf{k}} \right) + \frac{i}{2} (n_{\mathbf{k}} + n_{-\mathbf{k}}) P_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из этих уравнений следуют соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{\mathbf{k}} \right) (n_{\mathbf{k}} n_{-\mathbf{k}} - |\sigma_{\mathbf{k}}|^2) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_{\mathbf{k}} \right) (n_{\mathbf{k}} - n_{-\mathbf{k}}) &= 0, \end{aligned}$$

показывающие, что произвольные начальные условия за время порядка $1/\gamma$ релаксируют к состоянию (не обязательно стационарному), в котором $n_{\mathbf{k}} = n_{-\mathbf{k}}$; $|\sigma_{\mathbf{k}}| = n_{\mathbf{k}}$.

Условие $|\sigma_{\mathbf{k}}| = n_{\mathbf{k}}$ означает, что фазы пар волн полностью коррелированы. В этом случае можно ввести

$$\sigma_{\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}} e^{-i\psi_{\mathbf{k}}}.$$

В этих переменных уравнения (3.5) и определения (3.4) и (2.29) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{dn_{\mathbf{k}}}{2dt} &= n_{\mathbf{k}} \left[-\gamma_{\mathbf{k}} + \text{Im} (P_{\mathbf{k}}^* e^{-i\psi_{\mathbf{k}}}) \right], \\ \frac{d\psi_{\mathbf{k}}}{2dt} &= \tilde{\omega}_{\mathbf{k}} - \frac{\omega_p}{2} + \text{Re} (P_{\mathbf{k}}^* e^{-i\psi_{\mathbf{k}}}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} + 2 \sum_{\mathbf{k}'} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}'}, \quad (3.7)$$

$$P_{\mathbf{k}} = hV_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'} S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}'} e^{-i\psi_{\mathbf{k}'}}. \quad (3.8)$$

Полезно отметить, что переменные $n_{\mathbf{k}}$, $\psi_{\mathbf{k}}$ являются каноническими с гамильтонианом

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_S = 2 \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \left\{ \left(\omega_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}'} - \frac{\omega_p}{2} \right) + \right. \\ \left. + \left[hV_{\mathbf{k}} \cos \psi_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'} S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}'} \cos(\psi_{\mathbf{k}} - \psi_{\mathbf{k}'}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Действительно, легко убедиться, что уравнения (3.6) получаются варьированием $\mathcal{H}_S$ по правилу

$$\frac{dn_{\mathbf{k}}}{dt} + 2\gamma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = - \frac{\delta \mathcal{H}_S}{\delta \psi_{\mathbf{k}}}, \quad \frac{d\psi_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{\delta \mathcal{H}_S}{\delta n_{\mathbf{k}}}. \quad (3.10)$$

Формулы (3.10) показывают, что уравнения (3.6) являются гамильтоновскими, так что задача об определении спектра турбулентности в рамках S -теории — чисто динамическая задача.

б) Основное состояние. Условие внешней устойчивости. Приступим к изучению стационарных состояний системы пар, в которых все амплитуды n_k и фазы ψ_k не зависят от времени. Полагая в (3.6) $n_k = \psi_k = 0$, немедленно получаем для тех точек k -пространства, где $n_k = 0$, условие

$$|P_k|^2 = \gamma_k^2 + \left(\tilde{\omega}_k - \frac{\omega_p}{2} \right)^2. \quad (3.11)$$

Прежде чем анализировать этот результат, сделаем два замечания общего характера. Во-первых, ясно, что амплитуды пар не равны нулю лишь в узком слое вблизи резонансной поверхности $2\tilde{\omega}_k = \omega_p$. Это делает удобным использование следующих координат в k -пространстве: κ — отклонение от этой поверхности в нормальном направлении и Ω — координату на поверхности.

Во-вторых, величина коэффициентов уравнения (3.6), имеющих размерность частоты: γ_k , $\hbar V_k$, $\sum T_{kk'} n_{k'}$, $\sum S_{kk'} n_{k'} e^{-i\psi_{k'}}$, значительно меньше собственной частоты ω_k . Поэтому в теории достаточно учесть зависимость от κ только коэффициента $\left(\omega_k - \frac{\omega_p}{2} \right)$, а все остальные коэффициенты заменить их значениями на резонансной поверхности γ_Ω , $\hbar V_\Omega$, $T_{\Omega\Omega}$ и $S_{\Omega\Omega}$ соответственно.

Используя указанные приближения, можно из уравнения (3.11) легко найти те κ , для которых $n_{\kappa\Omega} \neq 0$:

$$\tilde{\omega}_{\kappa\Omega} = \frac{\omega_p}{2} \pm \sqrt{|P_\Omega|^2 - \gamma_\Omega^2}. \quad (3.12)$$

Таким образом, в стационарном состоянии распределение амплитуд пар сингулярно: $n_{\kappa\Omega} \neq 0$ только на двух поверхностях (3.12). Однако имеется бесчисленное множество таких стационарных состояний, отличающихся как видом этих поверхностей, так и распределением $n_{\kappa\Omega}$ на них. В самом деле, можно произвольно задавать направления Ω , в которых $n_{\kappa\Omega}$ равно нулю. В действительности из всех стационарных состояний могут реализовываться только такие, которые устойчивы по отношению к малым возмущениям. Требование устойчивости сильно сужает класс возможных стационарных состояний.

Очевидно, что исследование устойчивости стационарных состояний в рамках диагонального гамильтониана разбивается на две независимые задачи: исследование *внутренней* устойчивости — по отношению к возмущению амплитуд и фаз уже имеющихся пар и *внешней* — по отношению к рождению новых пар.

Наиболее просто исследовать внешнюю устойчивость. Запишем для этого с помощью (3.3) уравнение для пары волн возмущения

$$c_q, c_{-q}^* \sim e^{\nu_q t}$$

вне поверхностей (3.12). Пренебрегая зависимостью P_k и γ_k от κ , получим для инкремента выражение

$$\nu_q = -\gamma_\Omega + \sqrt{|P_\Omega|^2 - \left(\tilde{\omega}_q - \frac{\omega_p}{2} \right)^2},$$

аналогичное (2.20). Максимальный по $|q|$ инкремент ν_Ω (при фиксированном Ω) соответствует $2\tilde{\omega}_q = \omega_p$, т. е. лежит посередине между

поверхностями (3.12):

$$v_{\Omega} = -\gamma_{\Omega} + |P_{\Omega}|.$$

Условие внешней устойчивости, $v_{\Omega} \leq 0$, таким образом, может быть записано в виде

$$|P_{\Omega}| \leq \gamma_{\Omega}.$$

С другой стороны, из (3.12) следует, что $|P_{\Omega}| \geq \gamma_{\Omega}$ для тех направлений Ω , в которых $n_{\Omega} \neq 0$. Следовательно, для этих направлений оба неравенства совместны лишь в случае $|P_{\Omega}| = \gamma_{\Omega}$, когда две поверхности (3.12) сливаются в одну:

$$2\tilde{\omega}_{k_0} = \omega_p. \quad (3.14)$$

Таким образом, условие внешней устойчивости при заданном распределении амплитуд волн по углам полностью устраняет произвол в выборе поверхности, на которой $n_k \neq 0$. Эту поверхность (3.14) мы будем называть «резонансной поверхностью», а стационарное состояние, обладающее внешней устойчивостью, «основным состоянием».

Полученный результат имеет простой физический смысл. Как видно из формул (2.20), (2.21), в линейном режиме наиболее сильно связаны с накачкой волны, для которых расстройка частоты $\tilde{\omega}_k - (\omega_p/2) = 0$. Величина $\tilde{\omega}_k - (\omega_p/2)$ представляет собой расстройку частоты с учетом нелинейных членов. Если в точках, где сосредоточено n_k , эта величина не равна нулю, то существует область в $\mathbf{k}$ -пространстве такая, что находящиеся в ней пары более сильно связаны с накачкой, чем уже имеющиеся, и остается возможность их параметрического возбуждения.

Интересно в деталях выяснить, каким образом из теплового шума $n_k^0 = T/\omega_k$ в процессе развития параметрической неустойчивости возникает когерентное по модулю $\mathbf{k}$ состояние спиновых волн $n_k \propto \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$. Этот вопрос изучался аналитически и с помощью ЭВМ в работе ²⁴, где показано, в частности, что через некоторое время после включения накачки распределение волн по модулю $\mathbf{k}$ имеет вид гауссовской кривой, ширина которой асимптотически стремится к нулю как $1/\sqrt{t}$.

Нашей дальнейшей задачей является изучение распределения пар на резонансной поверхности (3.14). Введем функцию распределения N_{Ω} — «число» пар на единицу телесного угла, определив ее равенством

$$N = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = \int N_{\Omega} d\Omega. \quad (3.15)$$

Стационарные уравнения для N_{Ω} и ψ_{Ω} , следующие из (3.6) — (3.8) и (3.14), запишем в виде

$$(P_{\Omega} e^{i\psi_{\Omega}} - i\gamma_{\Omega}) N_{\Omega} = 0, \quad P_{\Omega} = hV_{\Omega} + \int S_{\Omega\Omega'} N_{\Omega'} e^{-i\psi_{\Omega'}} d\Omega'. \quad (3.16)$$

Эти уравнения еще не определяют однозначно распределение N_{Ω} и ψ_{Ω} , ибо произвольным образом можно задавать области на поверхности, в которых $N_{\Omega} = 0$. Требование внешней устойчивости, как будет показано в следующем разделе, значительно сокращает класс возможных решений. а в ряде случаев устойчивые распределения являются единственными.

Условию внешней устойчивости полезно придать следующую геометрическую интерпретацию. Выражения $\gamma = \gamma_{\Omega}$ и $P = P_{\Omega}$ являются уравнениями для поверхностей в $\mathbf{k}$ -пространстве. Условие (3.13) означает, что поверхность P заключена целиком внутри поверхности γ и касается ее в тех точках Ω , где сосредоточено решение. В силу соотношений $V_{\mathbf{k}} = V_{-\mathbf{k}}$ и $S_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = S_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}$ обе эти поверхности имеют центр симметрии. Касание

поверхностей γ и P может происходить либо по дискретному набору точек, либо по континuumу — линии или даже куску поверхности. В первом случае осуществляется режим, состоящий из конечного числа монохроматических пар, во втором — режим с непрерывным распределением N_Ω . Возможен и промежуточный режим, когда поверхности касаются в изолированной паре точек и, кроме того, по некоторой линии. В этом случае в системе одновременно присутствуют монохроматическая пара и непрерывный фон. Заметим, что вопрос о применимости S -теории при наличии небольшого числа дискретных пар требует специального обоснования, включающего исследование их устойчивости в рамках точного гамильтониана (см. ниже).

в) **П о с т а т и о н о е в о з б у ж д е н и е в о л н.** Займемся исследованием распределения параметрически возбужденных волн N_Ω по резонансной поверхности при разных, начиная с порогового, значениях внешнего поля h .

При изучении распределения N_Ω мы в основном ограничимся аксиально-симметричным случаем, который реализуется в изотропном и кубическом ферромагнетике, намагниченном вдоль оси $\langle 111 \rangle$ или $\langle 100 \rangle$. В этих случаях коэффициент связи с накачкой определяется формулой (2.26), а коэффициенты, описывающие взаимодействие, имеют вид

$$S_{\Omega\Omega'} = S(\theta, \theta'; \varphi - \varphi'), \quad T_{\Omega\Omega'} = T(\theta, \theta'; \varphi - \varphi'). \quad (3.17)$$

Из аксиальной симметрии ясно, что в стационарном состоянии амплитуда пар $N_\Omega \equiv N_{\theta, \varphi}$ не зависит от азимутального угла φ . Определим амплитуду N_θ равенством

$$N_{\theta, \varphi} = 2\pi N_\theta,$$

так что

$$N = \int N_\Omega d\Omega = \int N_\theta \sin \theta d\theta.$$

Из уравнений для n_k ясно также, что величина $P_k^* \delta_k$ также не зависит от φ . Учитывая, что $V_k = V_\theta e^{2i\varphi}$ (см. (2.26)), получим

$$\psi_\Omega \equiv \psi_{\theta, \varphi} = \psi_\theta + 2\varphi. \quad (3.18)$$

Эти соотношения позволяют исключить зависимость от φ в уравнении (3.16) и записать его в виде

$$(P_\theta e^{i\psi_\theta} - i\gamma_\theta) N_\theta = 0, \quad (3.19)$$

$$P_\theta = P_\Omega e^{-2i\varphi} = hV_\theta + \int S_{\theta\theta'} N_{\theta'} e^{-i\psi_{\theta'}} \sin \theta' d\theta',$$

где

$$S_{\theta\theta'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta, \theta'; \varphi - \varphi') e^{2i(\varphi - \varphi')} d(\varphi - \varphi'), \quad (3.20)$$

Для решения вопроса о распределении N_θ при малых надкритичностях воспользуемся приведенным выше геометрическим толкованием условия внешней устойчивости (3.13). При весьма малых надкритичностях, когда амплитуды N_θ малы, поверхность $|P_\theta|$ мало отличается от поверхности hV_θ , имеющей максимум на экваторе — $\theta = \pi/2$. Мало отличается также и кривизна этих поверхностей (вторые производные по θ). Отсюда ясно, что поверхности $|P_\theta|$ и γ_θ соприкасаются друг с другом только по линии $\theta = \frac{\pi}{2}$. Это означает, что при малых превышениях над порогом

распределение N_θ отлично от нуля только на этой линии:

$$N_\theta = N_1 \delta \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.21)$$

Для интегральной амплитуды $N_1 = \sum_k |c_k|^2$ и фазы $\psi_1 = \psi_{\pi/2}$ из (3.19) легко получить

$$N_1 = \frac{\sqrt{h^2 V_1^2 - \gamma_1^2}}{|S_{11}|}, \quad \sin \psi_1 = \frac{\gamma_1}{h V_1}. \quad (3.22)$$

где

$$V_1 = V_{\pi/2}, \quad S_{11} = S_{\pi/2}, \quad \gamma_1 = \gamma_{\pi/2}.$$

Использованные здесь геометрические рассуждения легко обобщаются на случай произвольной зависимости V_Ω . Можно доказать²⁰ общую теорему о том, что при достаточно малой надкритичности N_Ω отлично от нуля только в тех точках резонансной поверхности, где $|V_\Omega|$ максимально. Для сферической симметрии это точки всей поверхности, при аксиальной симметрии — точки одной (при $\theta = \pi/2$) или двух линий. В случае более низких симметрий это одна или несколько эквивалентных пар точек. Интересно, что интегральная амплитуда мало чувствительна к степени симметрии задачи. Она определяется формулой (3.22), в которой $V_1 = \max |V_\Omega|$, а S_{11} есть среднее значение $S_{\Omega\Omega'}$ на множестве точек, где $N_\Omega \neq 0$.

Покажем, что функция распределения пар (3.21), сосредоточенная на экваторе, сохраняет устойчивость по отношению к рождению пар на других широтах вплоть до достаточно больших надкритичностей. Рассмотрим для этого функцию $|P_\theta|$. Из (3.19), (3.21) и (3.22) получим

$$|P_\theta|^2 = N_1^2 \left(S_{11} \frac{V_\theta}{V_1} - S_{\theta 1} \right)^2 + \frac{V_\theta^2}{V_1^2} \gamma_1^2.$$

Ясно, что состояние (3.21) будет устойчивым до тех пор, пока $|P_\theta|^2 < \gamma_\theta^2$ для всех θ , кроме $\theta = \pi/2$. «Второй порог» $h = h_2$ соответствует минимальному значению h , при котором происходит касание поверхностей $|P_\theta|$ и γ_θ при некотором $\theta = \theta_2$, не равном $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, $h_2 = \min h_\theta$ при $\theta = \theta_2$, где h_θ определяется из условия $|P_\theta| = \gamma_\theta$,

$$h_\theta^2 = h_1^2 \left[1 + \frac{S_{11}^2}{\gamma_1^2} \frac{\gamma_\theta^2 V_1^2 - \gamma_1^2 V_\theta^2}{(S_{\theta 1} V_1 - S_{11} V_\theta)^2} \right]. \quad (3.23)$$

При простейших предположениях $\gamma_\theta = \gamma$ и $S_{\theta 1} = 0$ получаем, что $h_2^2/h_1^2 = 2$ при $\theta_2 = 0$. В действительности же для кубических ферромагнетиков реальная функция $S_{\theta 1}$ сильно отличается от константы, что приводит как правило, к значительному увеличению второго порога.

Из соображений симметрии следует, что $S_{\theta 1} = S(\sin^2 \theta)$, $S_{\theta 1}(0) = 0$, т. е.

$$S_{\theta 1} = S_1 \sin^2 \theta + S_2 \sin^4 \theta + \dots \quad (3.24)$$

Выражения для коэффициентов S_1 , S_2 в общем случае весьма громоздки. В качестве примера приведем выражение для $S_{\theta 1}$ в случае, когда волновой вектор параметрических волн стремится к нулю²³:

$$S_{\theta 1} = 2\pi g^2 \left(\frac{\omega_M}{\omega_p} \right) \left\{ \sin^2 \theta \left[\frac{\omega_M}{\omega_p} (N_z - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_M}{\omega_p} \right)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_M}{\omega_p} \right)^2} \sin^4 \theta \right] + \right. \\ \left. + \sin^2 2\theta \frac{\omega_M}{\omega_p} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_M}{\omega_p} \right)^2} \sin^4 \theta - \frac{\omega_M}{\omega_p} \sin^2 \theta \right] \right\}. \quad (3.25)$$

Для оценки величины второго порога ограничимся двумя членами разложения в (3.24) и положим $\gamma_0 = \text{const}$. Тогда

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = 1 + 11 \left(\frac{S_1 + S_2}{S_2}\right)^2 \theta_2 \approx 50^\circ. \quad (3.26)$$

Из (3.25) для $\omega_M \ll \omega_p$ получим

$$S_1 + S_2 \approx 2\pi g^2 \left(\frac{\omega_M}{\omega_p}\right)^2 \left[N_z - 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_M}\right)^2}\right],$$

$$S_2 \approx 2\pi g^2 \left(\frac{\omega_M}{\omega_p}\right)^2 \left(4 - 2\frac{\omega_M}{\omega_p}\right).$$

Например, для сферы YIG при $\omega_p/\omega_M = 1,9$ получим $(h_2/h_1)^2 \approx 3,5$ (при 5,5 дб). Существование при $h_1 < h < h_2$ только одной группы волн на экваторе резонансной поверхности и пороговое возбуждение второй группы вдали от экватора при $h = h_2$ позволяет говорить о поэтапном возбуждении волн при параметрической неустойчивости. Поэтапное возбуждение сингулярных в $\mathbf{k}$ -пространстве спектров является характерной чертой S-теории. Поэтапное возбуждение волн можно сравнить с картиной зарождения турбулентности при небольших числах Рейнольдса, описанной Ландау⁴⁴. Последовательное включение новых групп волн по мере увеличения надкритичности совпадает с предложенной в⁴¹ концепцией увеличения эффективного числа степеней свободы по мере перехода к развитой турбулентности.

В работе²¹ описан прямой эксперимент по наблюдению второго порога. Он заключался в следующем. Образец YIG помещался в резонатор с двумя вырожденными ортогональными модами, магнитное поле которых $\mathbf{h}$ и $\mathbf{h}_\perp$ было соответственно параллельно и перпендикулярно к намагниченности $\mathbf{M}$. Параллельный канал использовался для параметрического возбуждения спиновых волн, ортогональный ему канал — для регистрации излучения образца на частоте накачки. Наблюдалось (рис. 4) резкое увеличение мощности излучения в перпендикулярный канал при надкритичности $\sim 8-12$ дб в зависимости от величины постоянного магнитного поля, ориентации и формы образца.

Мода резонатора с поляризацией $\mathbf{h} \perp \mathbf{M}$ возбуждается однородной прецессией намагниченности, которая в свою очередь «раскручивается» параметрическими спиновыми волнами. Этот процесс описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^* b_0^* b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} + \text{к. с.}),$$

в котором $u_{\mathbf{k}} = u \sin 2\theta e^{i\varphi}$. Отсюда для величины излучения в поперечный канал можно получить выражение

$$P_\perp \sim \left| \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} \right|^2,$$

которое обращается в нуль для $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. Зависимость $P_\perp(h)$, приведенная на рис. 4, таким образом, убедительно свидетельствует о том,

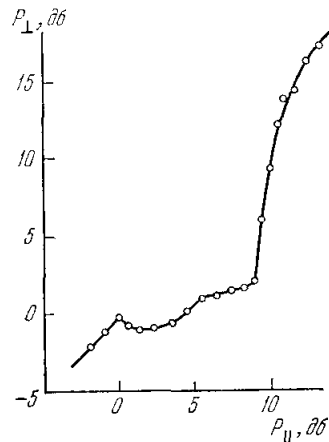


Рис. 4. Зависимость излучения в «перпендикулярный» канал от мощности накачки (сфера YIG, $\mathbf{M} \parallel \langle 100 \rangle$).

что в интервале $0-9 \text{ дб}$ возбуждены только пары с $\theta = \frac{\pi}{2}$. Излучение $P_{\perp}$, возникающее при большей надкритичности, естественно связать с возбуждением второй группы пар с $\theta \neq \pi/2$.

Второй порог можно наблюдать также по некоторым косвенным признакам, например, по характерному искажению вершины импульса накачки и по излому зависимости вещественной восприимчивости χ' от мощности накачки (см. следующий раздел). Ряд последовательных порогов, обнаруженных впервые Петраковским и Бержанским по искажению импульса накачки⁴⁵, по-видимому, связан с поэтапным возбуждением параметрических спиновых волн.

В заключение этого пункта опишем качественно поведение параметрических спиновых волн при $h > h_2$. Можно убедиться в том, что состояние с двумя группами пар на широтах θ_1 и θ_2 становится неустойчивым при некоторой надкритичности h_3 , и рождается третья группа на широте θ_3 . При h_4 возникает следующая группа θ_4 и т. д. Вопрос о том, что произойдет при дальнейшем увеличении h , обсуждается в работе²⁰. При больших h/h_1 распределение N_{Ω} весьма чувствительно к тонкой структуре величин V_{Ω} и $S_{\Omega\Omega'}$; в одних случаях устанавливается непрерывное распределение пар по резонансной поверхности, в других — «срыв» ограничения и возникновение существенно нестационарной картины. При большом количестве дискретных групп пар начинают играть роль недиагональные члены гамильтониана, сглаживающие сингулярные по углам распределения.

г) **Нелинейные восприимчивости.** В разделе 2 уже отмечалось, что основными экспериментально наблюдаемыми характеристиками системы параметрических волн являются нелинейные восприимчивости χ' и χ'' , определенные формулами (2.33) и (2.34). В случае аксиальной симметрии из (3.18) и (3.19) получим

$$\begin{aligned}\chi'' &= \frac{2 \sum_{\theta} V_{\theta} N_{\theta} \sin \psi_{\theta}}{h} = \frac{2 \sum_{\theta} \gamma_{\theta} N_{\theta}}{h^2}, \\ \chi' &= \frac{2 \sum_{\theta} V_{\theta} N_{\theta} \cos \psi_{\theta}}{h} = \frac{2 \sum_{\theta\theta'} S_{\theta\theta'} N_{\theta} N_{\theta'} \cos(\psi_{\theta} - \psi_{\theta'})}{h^2}.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Из этих формул видно, что мнимая восприимчивость χ'' характеризует только интегральную интенсивность пар, в то время как вещественная восприимчивость χ' существенно зависит и от фазовых соотношений между парами. Поэтому величина χ' является более тонкой характеристикой системы, чувствительной к деталям распределения пар в пространстве, автоколебаниям, неоднородностям и т. п. С этим обстоятельством в значительной мере связан большой разброс экспериментальных значений χ' , имеющих у различных авторов. Так, например, в одной из первых работ²⁵ сообщалось, что в YIG отношение $\chi'/\chi'' \approx 0,1$ и слабо зависит от магнитного поля. Малость этого отношения явилась причиной, на основании которой в качестве механизма ограничения предлагались различные варианты нелинейного заглушения, приводящие к $\chi' \approx 0$ ^{35, 36}. Картина поведения спиновых волн за порогом параметрического возбуждения, описанная в монографии³⁷ и, в частности, механизм «автоподавления» амплитуды, также существенным образом исходит из предположения, что $\chi'/\chi'' \ll 1$.

Однако последующее тщательное изучение поведения χ' и χ'' в различных экспериментальных ситуациях показало, что в совершенных моно-

кристаллах в отсутствие автоколебаний величина χ' не мала и может даже превосходить величину χ'' ^{23, 46}.

На рис. 5 показаны характерные зависимости $\chi'(h^2)$ и $\chi''(h^2)$ для сферы YIG в трех основных кристаллографических направлениях: в направлении $\langle 100 \rangle$, когда отсутствуют автоколебания намагниченности, и в направлениях $\langle 111 \rangle$ и $\langle 110 \rangle$, когда наблюдаются интенсивные автоколебания. Видно, что автоколебания намагниченности, не влияя существенно на величину χ'' , могут уменьшить величину χ' в несколько раз*). Этот факт можно объяснить следующим образом: при больших превышениях над порогом неустойчивости

$$\sin \psi \approx h_1/h \ll 1,$$

$$|\cos \psi| \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{h} \right)^2,$$

т. е. косинус фазового сдвига пар по отношению к накачке, определяющей величину χ' , близок к своему экстремальному значению. Развитие автомодуляций, приводящих к периодическому изменению угла ψ , не меняя среднего значения $\sin \psi$, уменьшает среднее значение $\cos \psi$ и вместе с ним восприимчивость χ' .

Тот факт, что $\chi'/\chi'' \approx 1$, однозначно свидетельствует о наличии существенного фазового рассогласования между накачкой и парами спиновых волн, которое следует из S -теории. Ее сравнение с экспериментальными зависимостями χ' и χ'' от h существенно облегчается при малых надкритичностях ($h \lesssim 2 h_1$), когда возбуждены только пары на экваторе с $\theta = \pi/2$. В этом случае из (3.27) и (3.22) следует

$$\chi'' = \frac{2V_1^2 h_1}{S_{11}} \frac{\sqrt{h^2 - h_1^2}}{h^2}, \quad \chi' = \frac{2V_1^2}{S_{11}} \frac{h^2 - h_1^2}{h^2}. \quad (3.28)$$

Графики этих зависимостей показаны на рис. 2. Видно качественное совпадение характера теоретических и экспериментальных (рис. 5, ориентация $\langle 100 \rangle$) кривых. Например, в соответствии с теорией, кривая χ' пересекает кривую χ'' в максимуме. Расхождение теоретических и экспериментальных кривых χ' (h^2) при $h^2 > 8 \delta b$ естественным образом объясняется возбуждением второй группы пар, которые не учитывают формулы (3.28).

Для сравнения S -теории с экспериментом в области больших надкритичностей проводились численные расчеты на ЭВМ²³. Для этого прежде

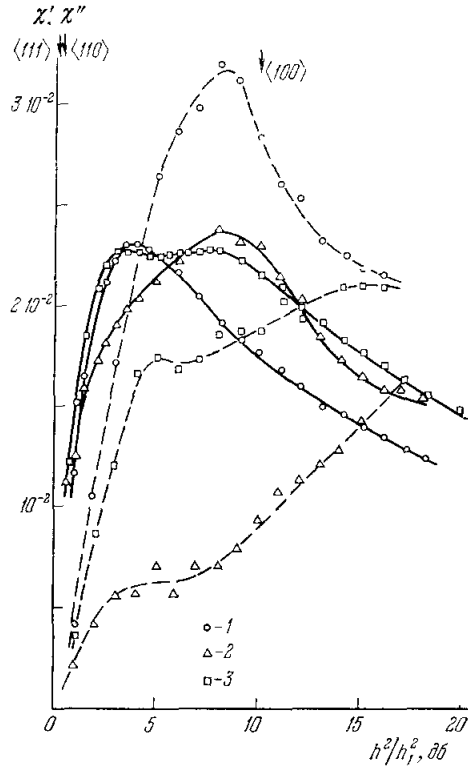


Рис. 5. Экспериментальные зависимости вещественной χ' (штриховая линия) и мнимой χ'' (сплошная линия) частей продольной восприимчивости от мощности накачки для сферы YIG.

1 — ориентация $\langle 100 \rangle$, 2 — ориентация $\langle 111 \rangle$, 3 — ориентация $\langle 110 \rangle$. Стрелками обозначены пороги возбуждения автоколебаний.

*) Отметим, что в работе⁴⁶ получены зависимости χ' от χ'' от h^2 , качественно совпадающие с приведенными на рис. 5 при всех надкритичностях, за исключением области $\sim 1-2 \delta b$ вблизи порога.

всего вычислялись коэффициенты $S_{\theta\theta}$, в конкретных экспериментальных ситуациях для YIG. При этом использовались только известные значения

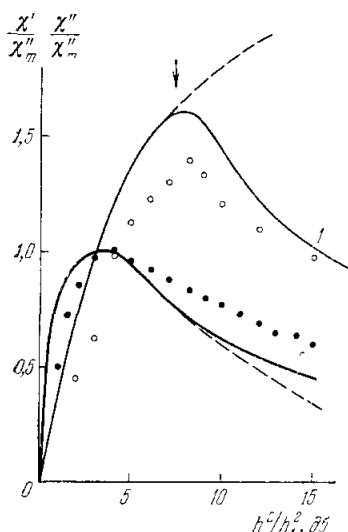


Рис. 6. Результат численного расчета восприимчивостей χ' и χ'' (сплошные линии).

Пунктир — восприимчивости в модели одной группы пар с $\theta = \pi/2$. Стрелкой обозначен порог рождения второй группы пар. Значки — результат лабораторного эксперимента (сфера YIG, $H = H_c - 100$ э, $M \parallel \langle 100 \rangle$). 1— γ' , 2— γ'' .

основных параметров YIG: намагниченности, поля кристаллографической анизотропии, и обменного поля. Полученные таким образом значения $S_{\theta\theta}$, подставлялись в нестационарные уравнения движения S-теории (3.3), которые решались на ЭВМ методом итерации по времени от уровня теплового шума. Вычисленные стационарные значения амплитуд и фаз при различных надкритичностях позволили определить величины χ' и χ'' по формулам (3.27). Результаты этих вычислений приведены на рис. 6 вместе с результатами лабораторного эксперимента. Видно не только качественное, но и хорошее количественное совпадение теории с экспериментом.

В табл. I проведено сравнение теоретических и экспериментальных значений максимальной восприимчивости $\chi_m'' = \max \chi''(h)$ для различных кубических ферромагнетиков сферической формы. Для YIG проводились абсолютные измерения восприимчивости по стандартной методике, описанной в п. г) раздела 2. Величины χ_m'' для остальных кристаллов измерены на той же установке путем сравнения с YIG. Теоретические значения χ_m'' вычислялись по формуле (3.28):

$$\chi_m'' = \frac{V_1^2}{|S_{11}|}, \quad (3.29)$$

которая для кубических ферромагнетиков в случае аксиальной симметрии ($M \parallel \langle 111 \rangle$, $\langle 100 \rangle$) после подстановки выражений для V_1 и S_1 приобретает вид ²³

$$\chi_m'' = \frac{1}{8\pi} \left| \frac{1}{N_z - 1 + \beta (\omega_a/\omega_M) + \sqrt{(\omega_p/\omega_M)^2 + 1}} \right|, \quad (3.30)$$

где

$$\beta = \begin{cases} -8 & \text{при } M \parallel \langle 111 \rangle, \\ +9 & \text{при } M \parallel \langle 100 \rangle. \end{cases}$$

Из табл. I видно, что простая формула (3.30) хорошо описывает абсолютные значения запороговой восприимчивости для широкого класса

Таблица I

Кристалл	$4\pi M = \frac{\omega_M}{g}$	$H_A = \frac{\omega_a}{g}$	$\frac{2\Delta H}{g} = \frac{\gamma_g}{g}$	$\chi_m'' \cdot 10^3$		Ориентация
				Эксперимент	Теория (3.30)	
1. $Y_3Fe_5O_{12}$ (YIG)	1750	84	0,12	24 ± 5	21	$\langle 100 \rangle$
2. $Y_3Fe_{4,3,5}Se_{0,65}O_{12}$	1500	8	0,36	23	22	$\langle 100 \rangle$
3. $B_{10,2}Ca_{2,8}Fe_{3,6}V_{1,4}O_{1,2}$	650	58	0,45	5	7,5	$\langle 100 \rangle$
4. $Li_{0,5}Fe_{2,5}O_4$	3700	580	0,80	80	70	$\langle 111 \rangle$
5. $NiFe_2O_4$	3200	490	1,49	25	19	$\langle 100 \rangle$
				55	84	$\langle 111 \rangle$

кубических ферромагнетиков. Некоторое расхождение теории с экспериментом для NiFe_2O_4 (ориентация $\langle 111 \rangle$), по-видимому, связано с тем, что в этом случае максимум восприимчивости лежит за порогом рождения второй группы пар, когда формула (3.30) неприменима.

В работе ⁴⁷ измерялась восприимчивость χ_m'' для одноосного ферромагнетика $\text{Ba}_2\text{Zn}_2\text{Fe}_{12}\text{O}_{14}$ с анизотропией типа «легкая плоскость» и было получено аномально большое значение $\chi_m'' = 0,2$. Теоретическая оценка для χ_m'' , которую можно сделать по формуле (3.29), вычисляя для этого случая коэффициенты V_1 и S_{11} без учета диполь-дипольного взаимодействия (при $\omega_M < \omega_a$, $\omega_p \ll \omega_a$), дает

$$\chi_m'' = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_M \omega_a}{\omega_p^3}. \quad (3.31)$$

Беря из ⁴⁷ параметры $\text{Ba}_2\text{Zn}_2\text{Fe}_{12}\text{O}_{14}$, $4M = 2850$ эс, $\omega_a/g = 9900$ э и частоту накачки $\omega_p/g = 6300$ э, получим значение $\chi_m'' = 0,1$, качественно согласующееся с экспериментом.

Большой интерес представляет также сравнение с экспериментом в отношении знака вещественной восприимчивости χ' . В соответствии с формулой (3.28) знак χ' совпадает со знаком S_{11} и для кубических ферромагнетиков определяется знаком знаменателя в формуле (3.30). В соответствии с экспериментом теория предсказывает для слабоанизотропных кристаллов (№ 1, 2, 3 в табл. I) $\chi' > 0$; для кристаллов с большой анизотропией (№ 4, 5) $\chi' > 0$ для ориентации $\langle 100 \rangle$ и $\chi' < 0$ для ориентации $\langle 111 \rangle$.

д) Роль нелинейного затухания. Обсудим теперь роль нелинейного затухания спиновых волн в ограничении их параметрической неустойчивости. В совершенном кристалле затухание параметрических волн возникает за счет их взаимодействия с резервуаром тепловых спиновых волн и обусловлено процессами слияния параметрической волны с тепловой,

$$\omega_{k_0} + \omega_{k_1} = \omega_{k_2}, \quad \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2, \quad (3.32)$$

или процессом распада параметрической волны на две тепловые:

$$\omega_{k_0} = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (3.33)$$

(ω_{k_0} — относится к параметрической волне, ω_{k_1} , ω_{k_2} — к тепловым волнам). Процессы распада разрешены только для достаточно коротких спиновых волн $k > k_s$. Величину k_s можно вычислить, анализируя закон дисперсии (2.6). Для YIG численно оказывается $k_s \sim 10^5 \text{ см}^{-1}$. Декременты затухания волн за счет этих процессов можно вычислить при помощи кинетического уравнения для тепловых волн (см., например, ³¹). Эти декременты задаются формулами

$$\gamma_{k_0} = 4\pi \int |V_{012}|^2 (n_{k_1} - n_{k_2}) \delta(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega_{k_0} - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (3.34)$$

для слияния,

$$\gamma_{k_0} = 2\pi \int |V_{012}|^2 (n_{k_1} + n_{k_2} + 1) \delta(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega_{k_0} - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (3.35)$$

для распада.

Для вычисления линейного затухания достаточно подставить в (3.34) и (3.35) вместо n_k термодинамически равновесный спектр. Присутствие параметрических волн приводит к некоторой зависимости n_k от их уровня.

Этот эффект (на качественном уровне он обсуждался Шлеманом³⁵, Ле-Галем, Лемайром, Серé²⁸ и другими), количественно рассмотренный в работе⁴⁸, является причиной нелинейного затухания спиновых волн. При вычислении величины этого эффекта необходимо учитывать, что с параметрическими волнами взаимодействует лишь небольшая часть тепловых волн, определяемая законами сохранения (3.32) и (3.33); изменение n_k в этой области поэтому может быть не слишком малым.

Характер нелинейного затухания существенным образом зависит от того, какой из трехволновых механизмов релаксации преобладает. Неожиданным является то, что в пераспадной части спектра, когда γ_{k_0} определяется процессами слияния, дифференциальное нелинейное затухание оказывается отрицательным: $\partial\gamma/\partial N < 0$ (N — число параметрических волн). Действительно, в каждом акте слияния (3.32) увеличивается число магнонов N_2 в области k_2 и уменьшается число магнонов N_1 в области k_1 . В результате разность $n_{k_1} - n_{k_2}$ и вместе с ней затухание γ_{k_0} , определенное выражением (3.34), уменьшается. С другой стороны, процессы релаксации в системе тепловых магнонов стремятся вернуть эту разность к термодинамически равновесному значению. Конкуренция этих процессов определяет установившееся значение γ_{k_0} . Для его оценки схематически запишем уравнения баланса:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{2dt} &= -\gamma N + \text{накачка}, \\ \frac{dN_1}{2dt} &= -\gamma_1(N_1 - N_1^0) - \gamma N, \\ \frac{dN_2}{2dt} &= -\gamma_2(N_2 - N_2^0) + \gamma N,\end{aligned}$$

где N_1^0, N_2^0 — термодинамически равновесные значения N_1 и N_2 . В стационарном состоянии $\dot{N}_1 = \dot{N}_2 = 0$ и

$$N_1 - N_2 = N_1^0 - N_2^0 - \gamma N \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right). \quad (3.36)$$

Затухание параметрических волн γ согласно (3.34) равно $\gamma = c(N_1 - N_2)$. Подставляя сюда $N_1 - N_2$ из (3.36), получим

$$\gamma = \gamma_0 \frac{1}{1 + cN \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right)}. \quad (3.37)$$

При малой амплитуде параметрических волн ($cN < \gamma_1, \gamma_2$) это выражение упрощается:

$$\gamma \approx \gamma_0 - \eta_1 N, \quad \eta_1 = \gamma_0 c \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right). \quad (3.38)$$

Вычисления показывают⁴⁸, что по порядку величины $c \approx |V|^2/\omega_k$, что совпадает с оценкой коэффициентов гамильтониана четырехволнового взаимодействия S и T .

Отрицательность дифференциального нелинейного затухания означает, что оно не уменьшает, а увеличивает амплитуду параметрически возбуждаемых волн. Таким образом, при $k_0 < k_s$ ограничение параметрической неустойчивости происходит только за счет фазового механизма.

Из формулы (3.38) следует, что коэффициент отрицательного нелинейного затухания η_1 пропорционален отношению затуханий параметрических и тепловых волн $\gamma_0/\gamma_{1,2}$. Из анализа соотношений (3.32) следует, что при $k_0 \rightarrow 0$ $k_1, k_2 \rightarrow \infty$ и, поскольку затухание спиновых волн возрастает с ростом k , при $k \ll k_s$ влияние отрицательного нелинейного затухания несущественно, тогда как при $k_0 \sim k_s$ оно сравнимо по порядку величины с эффектами фазовых взаимодействий. При $k > k_s$ включается процесс

распада параметрических волн, приводящий, как легко показать, к положительному нелинейному затуханию, и знак нелинейного затухания определяется конкуренцией эффектов слияния и распада. В работе ⁴⁸ показано, что при $k \gtrsim k_s$ результирующее нелинейное затухание положительно:

$$\gamma \approx \gamma_0 + \eta_2 N, \quad \eta_2 \sim \frac{|V|^2}{\omega_k} \sim S,$$

и дает вклад в ограничение амплитуды волн, сравнимый с вкладом фазового механизма.

Существует еще один механизм нелинейного затухания — слияние двух и более параметрически возбужденных спиновых волн. Этот механизм был предложен Сулом и Готлибом ³⁶; он приводит к положительному дифференциальному нелинейному затуханию. В простейшем случае слияния двух волн

$$\gamma_{k_0} = \gamma_0 + \int \eta k_0 k'_0 n_{k'_0} dk'_0 \approx \gamma_0 + \eta_3 N, \quad N \approx \frac{|V|^2}{\omega_k} \approx S.$$

Этот процесс, вообще говоря, может конкурировать с фазовым механизмом ограничения. Он разрешен для волновых векторов k_0, k'_0 , больших некоторого характерного значения k_{3M} . Например, если k_0 и k'_0 лежат в плоскости экватора, то

$$6\omega_{ex} (k_{3M} l)^2 = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_M^2}.$$

Заметим, однако, что для кубических ферромагнетиков процесс слияния параметрических волн не играет роли вплоть до порога рождения второй группы пар h_2 при любом k . Это объясняется тем обстоятельством, что первая группа волн возбуждена в точности на экваторе резонансной поверхности ($\theta = \pi/2$) и при этом коэффициент $\eta_{k_0 k'_0}$ тождественно равен нулю (см. ³¹).

Нелинейное затухание легко включить в схему расчетов по S -теории; для этого достаточно заменить γ на $\gamma + \eta N$. Приведем графики зависимостей $\chi''(h^2)$ при разных величинах и знаках параметра η/S (рис. 7). Отметим некоторые характерные особенности этих кривых.

При $\eta > 0$ возникает конечный наклон кривой $\chi''(h^2)$ в точке порога, равный V_1^2/η , и конечное значение $\chi''(\infty) = \eta V_1^2/\eta^2 + S_{11}$. Интересно, что при $\eta < |S_{11}|$ максимальное значение χ'' не зависит от η и определяется формулой (3.29). Нелинейное затухание влияет лишь на положение максимума h_m , который с ростом η сдвигается в сторону больших h : $h_m = \sqrt{2} h_1 |S_{11}| / |S_{11}| - \eta$. При $\eta > |S_{11}|$ восприимчивость χ'' монотонно возрастает с ростом h .

Интересно отметить, что даже при $|\eta| \ll |S|$, $\eta > 0$ восприимчивость χ' резко уменьшается (по сравнению со случаем $\eta = 0$) в узкой области вблизи порога и кривая $\chi'(h)$ при $h = h_1$ имеет нулевую касательную:

$$\chi' = \frac{2SV^2}{\eta^2} \left(\frac{h - h_1}{h_1} \right)^2$$

при

$$(hV - \gamma) \leq 2\gamma\eta^2/S^2.$$

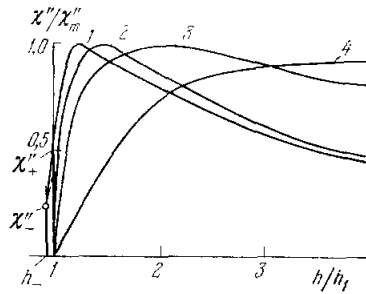


Рис. 7. Зависимости χ'' от амплитуды накачки с учетом нелинейного затухания.

$\eta/|S| = -0.25$ (отрицательное нелинейное затухание), $\eta/|S| = 0$, $\eta/|S| = 0.25$ и $\eta/|S| = 1$ (кривые 1—4 соответственно).

Возможно, что именно это объясняет, почему в работе ⁴⁸ не обнаружено отличие χ' от нуля в YIG при надкритичностях, меньших 1—2 дБ.

Для $\eta < 0$ происходит жесткое возбуждение параметрических спиновых волн, сопровождаемое гистерезисом зависимости $\chi''(h^2)$. При $|\eta| \ll S_{11}$ обратный скачок χ'' составляет половину прямого χ_+ : $\chi'' = \frac{1}{2} \chi_+ = 2 |\eta/S_{11}| \chi_m''$; он происходит при амплитуде накачки $h_- = h_1 |S_{11}| / (S_{11}^2 + \eta^2)^{1/2}$.

Явление жесткого возбуждения и гистерезис χ'' было обнаружено Ле-Галем, Лемайром и Серé ²⁸ в монокристаллах YIG при $\omega_p = 9,8$ Гц. Явление наблюдалось в некотором интервале полей $H_2 < H < H_1$, при поле H_2 «открывались» процессы распада и включалось положительное нелинейное затухание, при достаточно большом поле H_1 эффект исчезал из-за малости отрицательного нелинейного затухания.

Отрицательное нелинейное затухание приводит также к характерной зависимости χ'' от постоянного магнитного поля, показанной на рис. 8 ³⁸. Видно резкое увеличение χ'' при $H = H_1$ и $H = H_2$. Функция $\chi''(H)$ обнаруживает аномалию также вблизи значения поля $H = H_{3M}$, при котором включается процесс слияния двух параметрических волн ($k = k_{s1}$). Вблизи $H = H_{3M}$ наблюдается узкий резонансный минимум, переходящий в резонансный максимум с ростом надкритичности. Такое поведение противоречит первоначальной теории Сула и Готлиба, которая предсказывала

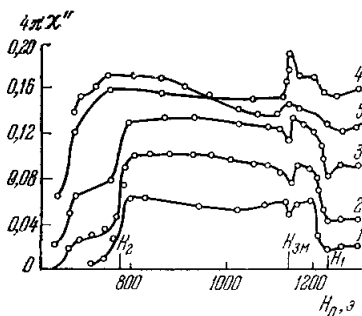


Рис. 8. Экспериментальная зависимость χ'' от постоянного внешнего магнитного поля (сфера YIG, $M \parallel \langle 100 \rangle$).

Кривые 1—5 соответствуют надкритичностям 0,5, 1, 2, 5 и 10 дБ.

ва резкое уменьшение восприимчивости в полях $H < H_{3M}$, обусловленное включением трехмагнитного механизма слияния. Из рис. 8 видно, что небольшой скачок (10%) наблюдается лишь при большой надкритичности. Эти факты легко понять в рамках изложенных в этом разделе представлений. При малых превышениях возбуждены только волны с $\theta = \pi/2$, для которых коэффициент V в формуле (3.34), описывающий процесс слияния, как уже отмечалось, обращается в нуль. Небольшое размытие функции распределения N_0 , обусловленное неоднородностями и другими причинами, приводит к конечному, но малому значению η_3 . Резкое увеличение η_3 происходит лишь при поле H_{3M} , где, как можно убедиться, интеграл (3.40) имеет резонансный пик, связанный с сингулярностью плотности состояний, для которых разрешен процесс слияния. Изменение знака резонансного пика объясняется тем, что при малых надкритичностях, как это видно из рис. 7, положительное нелинейное затухание уменьшает величину χ'' , а при больших надкритичностях увеличивает ее. Понятно также, что возникновение скачка χ'' при надкритичностях, больших 8 дБ, связано с рождением второй группы пар с $\theta \neq \pi/2$.

4. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ И АВТОКОЛЕБАНИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ

а) Спектр коллективных колебаний. До сих пор мы изучали стационарные состояния системы параметрических волн. В этом разделе мы рассмотрим поведение системы при отклонениях от стационарного состояния. Для простоты вначале пренебрежем диссипацией.

Тогда гамильтониан системы $\mathcal{H}$ является интегралом движения. Пусть значение $\mathcal{H}$ в возмущенном состоянии не совпадает с его значением $\mathcal{H}_0$ в основном состоянии. Это означает, что система никогда не сможет прийти в основное состояние и, поскольку других устойчивых стационарных состояний у нее нет, ее поведение будет существенно нестационарным. Возможны два типа такого поведения — система либо будет совершать малые колебания вокруг основного состояния, либо уйдет от него далеко. Покажем, что при параметрическом возбуждении спиновых волн осуществляются оба типа поведения.

Имея в виду сравнение теории с экспериментом, рассмотрим кубический ферромагнетик, намагниченный по оси $\langle 111 \rangle$ или $\langle 100 \rangle$. При надкритичности ниже второго порога спиновые волны в основном состоянии возбуждены в плоскости экватора.

Обозначая через α_k отклонения комплексных амплитуд c_k от основного состояния (3.21), (3.22), выделим в гамильтониане S -теории (3.9) часть $\mathcal{H}^{(0)}$, соответствующую основному состоянию, и части $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$, содержащие линейные и квадратичные по α члены. Учитывая уравнения движения, убеждаемся в экстремальности энергии основного состояния:

$$\mathcal{H}^{(1)} = 0.$$

Квадратичная по малым возмущениям часть гамильтониана после перехода от суммирования к интегрированию принимает такой вид:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{N_1}{(2\pi)^2} \left\{ 2 \int [S_{\varphi\varphi'} e^{i(\varphi-\varphi')} + T_{\varphi\varphi'} e^{i(\varphi'+\varphi)}] \alpha_{\varphi} \alpha_{\varphi'}^* d\varphi d\varphi' + \right. \\ \left. + \left[e^{i\varphi_1} \int T_{\varphi\varphi'} e^{-i(\varphi+\varphi')} \alpha_{\varphi} \alpha_{\varphi'} d\varphi d\varphi' + \text{к. с.} \right] \right\}, \quad (4.1)$$

где $T_{\varphi\varphi'} = T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, $S_{\varphi\varphi'} = T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ при $\theta = \theta' = \pi/2$, $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = \mathbf{k}_0$. Переходя к фурье-компонентам

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_{\varphi} e^{i(m-1)\varphi} d\varphi,$$

и используя аксиальную симметрию

$$T_{\varphi\varphi'} = T(\varphi - \varphi'), \quad S_{\varphi\varphi'} = S(\varphi - \varphi'),$$

получим

$$\mathcal{H}^{(2)} = N_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} [2(T_m + S_m) \alpha_m \alpha_m^* + (T_m \alpha_m \alpha_{-m} + \text{к. с.})], \quad (4.2)$$

где *)

$$T_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi) e^{-im\varphi} d\varphi, \\ S_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\varphi) e^{-i(m-2)\varphi} d\varphi. \quad (4.3)$$

Гамильтониан (4.2) может быть диагонализирован при помощи линейного канонического преобразования. Диагонализация возможна, если величина

$$\frac{\Omega_m^2}{4N_1^2} = (T_m + S_m)^2 - T_m^2 = S_m(2T_m + S_m) > 0.$$

*) Отметим, что определение (4.3) коэффициента S_0 совпадает с определением коэффициента $S_{\pi/2, \pi/2} = S_{11}$ (формула (3.20)).

В этом случае гамильтониан $\mathcal{H}^{(2)}$ может быть представлен в виде

$$\mathcal{H}^{(2)} = \sum^{\pm} \Omega_m \beta_m \beta_m^*. \quad (4.4)$$

Из (4.4) видно, что величина

$$\Omega_m = \pm 2N_1 \sqrt{S_m (2T_m + S_m)}$$

представляет собой частоту коллективных колебаний в системе спиновых волн. При $S_m (2T_m + S_m) < 0$ эта частота оказывается мнимой. Мнимость частоты указывает на неустойчивость основного состояния относительно возбуждения экспоненциально нарастающих колебаний (внутренняя неустойчивость, упомянутая в разделе 3, п. 2).

Каноническое преобразование однозначно определяет знак частоты коллективных колебаний Ω_m . Впрочем, этот знак может быть определен из простых соображений. При $|T_m| \ll |T_m + S_m|$ каноническое преобразование является малым, поэтому знак Ω_m совпадает со знаком $S_m + T_m$. При непрерывном увеличении T_m знак Ω_m сохраняется, изменение знака может произойти лишь после обращения Ω_m в нуль. При этом $|T_m| = |T_m + S_m|$, и при дальнейшем увеличении T_m имеет место неустойчивость. Таким образом, всегда знак Ω_m совпадает со знаком $T_m + S_m$.

Отрицательность Ω_m означает, что в результате возбуждения коллективных колебаний энергия системы спиновых волн уменьшается. При этом в процессе их релаксации энергия системы возрастает. Это не противоречит закону сохранения энергии, так как система параметрически возбужденных волн получает энергию от накачки.

В кубическом ферромагнетике в симметричных направлениях $\langle 111 \rangle$ и $\langle 100 \rangle$ величины S_m и T_m могут быть вычислены. При этом оказывается, что Ω_m отличны от нуля только при $m = 0, \pm 2$. Выражения для коэффициентов S_m, T_m , соответствующих этим модам, имеют такой вид ²⁶:

$$S_0 = 2\pi g^2 \left(\frac{\omega_M}{\omega_p} \right)^2 \left[\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega_M^2} + 1} + \tilde{N}_{z_0} - 1 \right], \quad (4.5)$$

$$T_0 = S_0 + 2\pi g^2 (\tilde{N}_{z_0} - 1), \quad (4.6)$$

$$\tilde{N}_{z_0} = N_z + \alpha \frac{\omega_a}{\omega_M}, \quad \beta = \begin{cases} -8 & \text{при } M \parallel \langle 111 \rangle, \\ +9 & \text{при } M \parallel \langle 100 \rangle, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$T_{\pm 2} = 2\pi g^2 \left(\frac{\omega_M}{2\omega_p} \right)^2 \left[\tilde{N}_{z_2} - 1 + \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega_M} \right)^2 + 1} \right], \quad (4.8)$$

$$S_{\pm 2} = 2\pi g^2 \left[(\tilde{N}_{z_2} - 1) u_{\pm}^2 + \frac{\omega_M}{2\omega_p} u_{\pm} \right], \quad (4.9)$$

где

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega_M^2}{\omega_p^2}} \mp 1 \right), \quad \tilde{N}_{z_2} = \omega_{ex}(ak)^2 + \beta \frac{\omega_a}{\omega_M}.$$

Эти формулы показывают зависимость частот коллективных колебаний от условий эксперимента: надкритичности, частоты накачки, намагниченности, внешнего магнитного поля, формы образца и кристаллографической анизотропии.

Выясним теперь, какое влияние на коллективные колебания оказывает затухание спиновых волн, тем более, что величина этого затухания γ_k может быть одного порядка с частотой Ω_m .

Линеаризуя уравнения движения (3.3) относительно возмущений α на фоне основного состояния (3.22) и, полагая $\alpha, \alpha^* \sim \exp(-i\Omega t)$, полу-

чим систему однородных по α , α^* алгебраических уравнений. Условие их разрешимости определяет частоту и затухание коллективных колебаний

$$\Omega_m = -i\gamma \pm \sqrt{4S_m(2T_m + S_m)N_1^2 - \gamma^2}. \quad (4.10)$$

Из формулы (4.10) следует важный вывод о том, что критерий возникновения внутренней неустойчивости на m -й коллективной моде не зависит от величины затухания и определяется, как и в консервативном случае, условием

$$S_m(2T_m + S_m) < 0. \quad (4.11)$$

В рамках S -теории коллективные колебания системы параметрических спиновых волн являются пространственно-однородными. При учете пространственной дисперсии каждой нормальной моде соответствует целая ветвь $\Omega_m(\mathbf{k})$, причем формулой (4.10) определяется ее щель. Пространственно-неоднородные коллективные колебания δ_n , $\delta\varphi \sim \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \Omega_m t)]$ в определенном смысле аналогичны волнам второго звука. В отличие от обычного второго звука, в газе тепловых магнонов в системе параметрических волн колеблется не только число пар $n_{\mathbf{k}}$, но и их фаза $\psi_{\mathbf{k}}$.

Спектр этих волн $\Omega_m(\mathbf{k})$ изучен в работе ⁴⁹. В простейшем случае, когда $\mathbf{k} \parallel \mathbf{M}$,

$$\Omega_m(\mathbf{k}) = -i\gamma \pm \sqrt{\left[2(T_m + S_m)N_1 + \omega'' \frac{\mathbf{k}^2}{2}\right]^2 - 4T_m^2 N_1^2 - \gamma^2},$$

где $\omega'' = \partial^2 \omega / \partial k_z^2$. Возможные варианты поведения $\Omega_m^2(\mathbf{k})$ (при $\gamma = 0$) изображены на рис. 9. Область отрицательных значений соответствует неустойчивости основного состояния. Отметим, что при больших $\mathbf{k}$ коллективные колебания всегда затухают: $\Omega_m(\mathbf{k}) = -i\gamma + (\omega'' \mathbf{k}^2 / 2)$.

б) Резонансное возбуждение коллективных колебаний. Рассмотренные выше коллективные колебания параметрических волн на опыте проявляются как низкочастотные ($\Omega \approx 10^6 \text{ сек}^{-1}$) колебания продольной намагниченности M_z . Ударное возбуждение этих колебаний часто можно наблюдать в переходном режиме после включения импульса накачки.

Удобнее возбуждать коллективные колебания резонансным образом, подавая на ферромагнетик, кроме поля накачки $h(t) \sim e^{-i\omega_p t}$, слабый сигнал $\mathbf{h}_s \parallel \mathbf{M}$ с частотой, близкой к ω_p : $\omega_s = \omega_p + \Omega$ ²⁷. Вычисления, проделанные в работе ²⁷ с помощью уравнений движения (3.3) S -теории, показывают, что восприимчивость к слабому сигналу $\chi''_{\omega_p + \Omega}$ имеет резонансный характер; имеются две частоты коллективного резонанса $\Omega = \pm \Omega_0$, совпадающие, как и следовало ожидать, с собственной частотой нулевой моды Ω_0 в отсутствие затухания:

$$\chi''_{\omega_p + \Omega} = \chi'' \left(\frac{h}{h_1} \right)^2 \frac{2\gamma^2 [\Omega_0^2 + \Omega^2 + 4\Omega(T_0 + S_0)N] \psi}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}.$$

При большой надкритичности, когда $\Omega_0^2 \gg \gamma^2$, форма линии близка к лоренцовой с шириной, равной затуханию спиновых волн γ . В точках резонанса восприимчивость равна

$$\chi''_{\omega_p \pm \Omega_0} = \chi'' \left(\frac{h}{h_1} \right)^2 \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{T_0^2}{S_0(2T_0 + S_0)}} \right]. \quad (4.12)$$

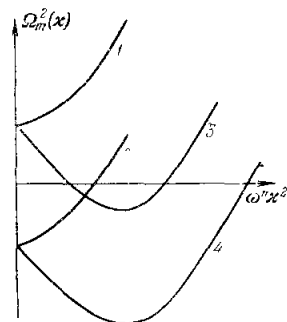


Рис. 9. Возможные варианты спектра коллективных колебаний (при $\gamma = 0$).

В областях $\Omega^2 < 0$ основное состояние неустойчиво. Кривые 1, 2 соответствуют случаю $(T_m + S_m) > 0$, кривые 3, 4 — случаю $(T_m + S_m) < 0$.

Принципиально важно, что восприимчивость может стать отрицательной; это соответствует не поглощению, а усилению слабого сигнала. Из формулы (4.12) следует, что поглощение происходит на частоте $\omega_p + \Omega$, а усиление на зеркальной частоте ($\omega_p - \Omega$).

Возникновение усиления можно трактовать как следствие распадной неустойчивости основного состояния (с «медленной» частотой, равной нулю) на электромагнитное излучение (с медленной частотой Ω) и коллективное колебание с собственной частотой Ω_0 . Закон сохранения энергии в этом процессе $0 \rightarrow \Omega + \Omega_0$. Таким образом, усиление происходит на частоте $\Omega = -\Omega_0$, что соответствует формуле (4.12). Поглощение

на этом языке есть следствие процесса распада слабого сигнала на основное состояние и коллективную моду с законом сохранения $\Omega = 0 + \Omega_0$.

Экспериментально коллективный резонанс наблюдался в работе ²⁷ на монокристаллах YIG. Отмечено хорошее количественное согласие с теорией. В частности, экспериментальная зависимость восприимчивости к слабому сигналу от мощности накачки (рис. 10) хорошо согласуется с формулой (4.12) вплоть до второго порога $(h/h_1)^2 = 8$ дб. Отметим также, что коллективный резонанс можно использовать как удобный и наглядный метод измерения времени релаксации спиновых волн. Измерения показывают, что в соответствии с теорией ширина линии резонансного поглощения практически не зависит от мощности накачки и хорошо согласуется со значением γ , полученным из величины порога параллельной накачки ²⁷.

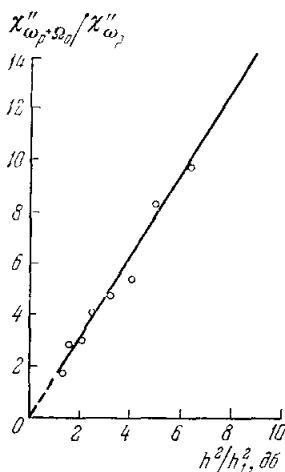


Рис. 10. Экспериментальная зависимость восприимчивости к слабому сигналу от мощности накачки (сфера YIG, $M \parallel \langle 100 \rangle$).

в) Автоколебания намагниченности. Хорошо известно, что при параметрической генерации спиновых волн стационарный режим часто не устанавливается, и намагниченность совершает сложные автоколебания вокруг некоторого среднего значения.

Основные экспериментальные факты, относящиеся к автоколебаниям и полученные для высококачественных кристаллов YIG при параллельной накачке, заключаются в следующем ^{37, 50, 51}:

1) Частоты автоколебаний намагниченности лежат в интервале от 10^4 до приблизительно 10^7 гц (в зависимости от мощности накачки и постоянного магнитного поля). При небольшом превышении порога спектр автоколебаний состоит из одной линии; с ростом уровня мощности происходит увеличение числа линий и смещение их в сторону более высоких частот. При больших превышениях над порогом спектр имеет шумовой характер.

2) Порог автоколебаний обычно весьма мал: 0,1—1 дб по отношению к порогу параметрического возбуждения, за исключением области малых волновых векторов ($H > H_c$), где порог автоколебаний заметно увеличивается. Порог также возрастает при введении в кристалл внутренних неоднородностей ⁵².

3) Наблюдается гигантская кристаллографическая анизотропия свойств автоколебаний, значительно превышающая анизотропию спектра спиновых волн. Так, интенсивность автоколебаний в YIG при ориентации намагниченности вдоль оси $\langle 111 \rangle$ превышает интенсивность этих колебаний вдоль оси $\langle 100 \rangle$ приблизительно в 100 раз.

Вопрос о физической природе автоколебаний является одной из основных проблем в задаче о параметрическом возбуждении спиновых волн.

Для объяснения природы автоколебаний привлекались различные гипотезы. Простейшая гипотеза ⁵³ состоит в предположении о том, что в спектре параметрически возбужденных спиновых волн присутствует несколько дискретных частот, соответствующих собственным колебаниям кристалла; биения между ними и приводят к появлению автоколебаний. Эта гипотеза объясняет ⁵³ ряд экспериментально наблюдаемых фактов (зависимость частоты автоколебаний от магнитного поля и кристаллографической ориентации намагниченности), но полностью игнорирует вопрос о зависимости частоты автоколебаний от мощности накачки и вообще вопрос о происхождении нескольких дискретных частот. Заметим, что S -теория предсказывает существование в стационарном состоянии только одной частоты $\omega_p/2$.

Другая группа гипотез связана с идеей о влиянии параметрически возбужденных волн на намагниченность (см., например, работу Грина и Шлемана ⁵⁴). Если средняя намагниченность кристалла следует за амплитудой спиновых волн с некоторым запаздыванием, то в таком кристалле могут раскачаться автоколебания намагниченности. С этой точки зрения написана монография Моносова ³⁷, исходящего из феноменологических уравнений Блоха — Бломбергера. Фактически, однако, на возникновение автоколебаний может влиять только инерционность тепловых спиновых волн с частотой порядка ω_p . Поэтому вопрос о влиянии инерционности тепловых спиновых волн должен решаться с помощью кинетического уравнения для волн; в настоящее время эта задача не решена. Можно, тем не менее, предположить, что в большинстве экспериментальных ситуаций влиянием инерционности можно пренебречь.

В рамках S -теории автоколебания находят естественное объяснение как результат развития описанной в п. а) раздела 4 неустойчивости стационарного состояния относительно возбуждения коллективных колебаний. Если, хотя бы для одной моды (с номером m), выполнены условия неустойчивости $S_m (2T_m + S_m) < 0$, то в рамках S -теории система параметрически возбужденных спиновых волн не имеет устойчивых стационарных состояний. При этом мыслимы две возможности — «выброс» системы за пределы применимости S -теории (при этом должна сильно возрасти амплитуда возбужденных волн) или установление колебаний вокруг стационарного состояния. Эти колебания, если они развиваются, и наблюдаются на опыте как автоколебания намагниченности. Из общих соображений следует ожидать, что автоколебания могут носить как регулярный, так и хаотический характер; в последнем случае их можно трактовать как «вторичную» турбулентность с временным масштабом, много большим масштаба «основной» турбулентности — периода спиновых волн.

Как видно из формулы (4.10), неустойчивость стационарного состояния является чисто аperiодической ($\text{Re } \Omega_m = 0$), поэтому вторичная турбулентность является сильной. Это делает крайне затруднительным аналитическое решение вопроса о нелинейной стадии развития коллективной неустойчивости и о характере вторичной турбулентности, если таковая возникает. Поэтому представляется целесообразным численное моделирование вторичной турбулентности на ЭВМ. При этом расчет реальной ситуации, например, для YIG, потребовал бы огромных затрат машинного времени и вряд ли возможен. Это заставляет обращаться к численному эксперименту на упрощенных моделях основного состояния.

В работе ²⁶ описан численный эксперимент по возбуждению автоколебаний на модели «двух лучей», в которой считалось, что спиновые волны сосредоточены при двух фиксированных углах $\theta_1 = \pi/2$ и $\theta_2 = \pi/4$.

Значения коэффициентов S_0 и T_0 выбирались близкими к вычисленным для YIG при ориентации магнитного поля относительно оси (111) (см. ниже), так что выполнялись условия неустойчивости нулевой моды.

Численный эксперимент показал, что в такой модели устанавливаются автоколебания амплитуд и фаз волн на лучах (рис. 11). Зависимость частоты этих автоколебаний от уровня накачки качественно согласуется с аналогичной зависимостью, обычно наблюдающейся в лабораторном эксперименте. На модели двух лучей был, кроме того, проделан эксперимент, моделировавший развитие коллективной неустойчивости при $m \neq 0$. При этом изучался вопрос о поведении суммарной амплитуды волн на нелинейной стадии развития этой неустойчивости, интересной потому, что на линейной стадии изменение суммарной амплитуды не происходит. Были выбраны лучи с $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$. Эксперимент показал (рис. 12) установление режима, в котором испытывают колебания как разность, так и сумма амплитуд волн на лучах. Колебания суммы амплитуд возникают из-за взаимодействия коллективных мод с различными m .

Таким образом, численный эксперимент на моделях показывает,

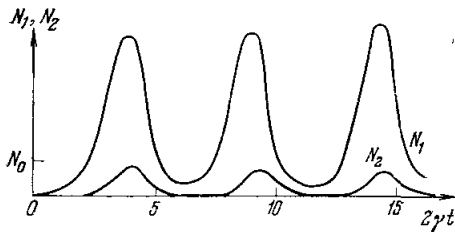


Рис. 11. Временная зависимость амплитуд пар на лучах при неустойчивости нулевой моды.

N_1 и N_2 отвечают лучам с $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi/4$.

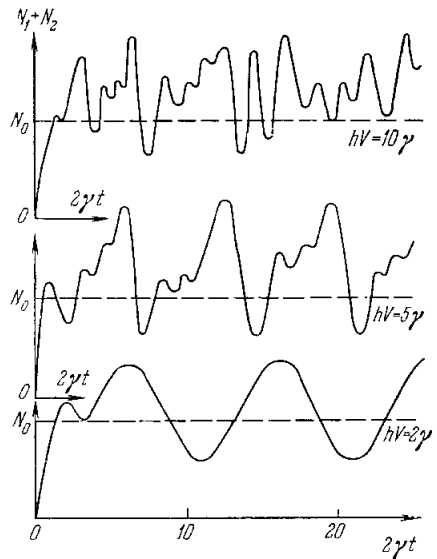


Рис. 12. Временная зависимость суммарной амплитуды пар на лучах при неустойчивости моды $m = 2$.

что в рамках уравнений S -теории развитие внутренней неустойчивости основного состояния приводит к автоколебаниям. Свойства этих автоколебаний — зависимость частоты и спектрального состава от мощности накачки — сопоставимы со свойствами реальных автоколебаний, наблюдаемых в лабораторном эксперименте. Как в численном, так и в лабораторном эксперименте развитие автоколебаний не влияет существенно на средний уровень параметрически возбужденных волн. Численный эксперимент показывает, кроме того, что при развитии неустойчивости на нулевой моде происходят глубокие, а при развитии неустойчивости на высших модах — мелкие колебания суммарной амплитуды волн и вместе с ней и наблюдаемой величины χ . Любопытно, что возникновение автоколебаний в численном эксперименте, как правило, сопровождалось уменьшением среднего значения χ' . Эта закономерность наблюдается и в лабораторном эксперименте.

Полученные выше результаты позволяют сделать предсказание относительно того, в каких случаях автоколебания должны наблюдаться в реальном эксперименте. Приведем значения коэффициентов S_m и T_m

для YIG, вычисленные по формулам (4.5) — (4.8) для типичной экспериментальной ситуации: $N_z = 1/3$ (сфера), $\omega_p = 9,4$ ГГц, $k = 0$ ($H = H_c$), $\omega_M = 4,9$ ГГц, $\omega_a = 0,23$ ГГц (комнатная температура) (табл. II).

Таблица II
Коэффициенты S_m, T_m в единицах $2\pi g^2$ для YIG

Ориентация	T_0	S_0	$T_2 = T_{-2}$	S_2	S_{-2}
$\langle 100 \rangle$	0,28	0,52	0,11	0,01	—0,36
$\langle 111 \rangle$	—0,75	0,30	0,05	0,01	—1,27

Видно, что не только величины, но и знаки коэффициентов зависят от ориентации намагниченности. Подставляя табличные данные в критерий неустойчивости (4.11), можно убедиться, что в «легком» направлении

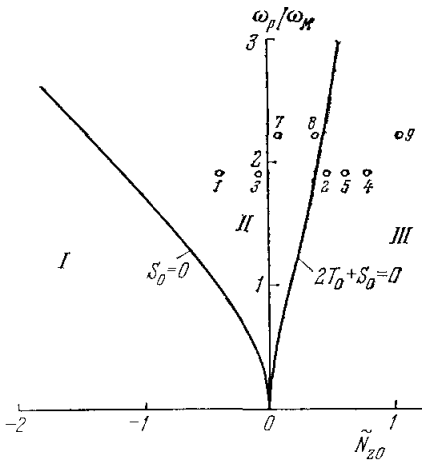


Рис. 13. Фазовая диаграмма для нулевой моды.

Области I и III соответствуют устойчивой фазе, в области II развиваются интенсивные автоколебания.

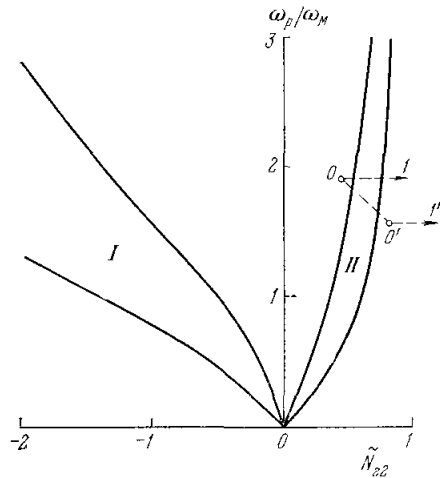


Рис. 14. Фазовые диаграммы для мод $m = 2$ и $m = -2$.

В области I неустойчива мода $m = 2$, в области II — мода $m = -2$.

$\langle 111 \rangle$ имеется неустойчивость относительно нулевой моды, в то время как в «трудном» направлении $\langle 100 \rangle$ все моды в рассмотренной ситуации устойчивы. На опыте при $H = H_c$ в трудном направлении автоколебания действительно отсутствуют вплоть до превышений $h_2 \approx 6 - 7$ дБ, соответствующих второму порогу; в «легком» же направлении наблюдаются интенсивные автоколебания практически сразу за порогом h_1 ³⁷.

Условие возникновения автоколебаний в различных экспериментальных ситуациях подробно проанализированы в работе ⁵⁵, в которой использовалось графическое представление критерия неустойчивости (4.11) в виде фазовой диаграммы. Используя выражения для (4.5) — (4.7) для S_0 и T_0 , построим на плоскости $(\omega_p/\omega_M, \tilde{N}_{z0})$ линии $S_0 = 0$ и $2T_0 + S_0 = 0$, представляющие границы области неустойчивости нулевой моды (рис. 13). Неустойчивая «фаза» заключена между этими кривыми. Аналогичным образом можно построить на плоскости $(\omega_p/\omega_M, \tilde{N}_{z2})$ фазовые диаграммы, изображающие области неустойчивости мод $m = 2$ и $m = -2$ (рис. 14).

Меняя условия опыта, например, путем изменения температуры, формы образца и т. д., можно двигать точку на фазовой диаграмме, соответствующую данной экспериментальной ситуации; при этом можно пересекать границы областей неустойчивости.

Обычно на опыте, в котором не приняты меры по повышению чувствительности, наблюдается неустойчивость только нулевой моды, приводящая к весьма интенсивным автоколебаниям намагниченности. Результаты ряда таких экспериментов (при $\omega_p = 9,4$ ГГц и $T = 300$ °К) в чистых монокристаллах YIG и YIG с добавкой скандия, уменьшающей поле анизотропии, сведены в табл. III.

Таблица III

Кристалл	YIG: $\frac{\omega_p}{\omega_M} = 1,9, \frac{\omega_a}{\omega_M} = 0,05$						YIG + Sc: $\frac{\omega_p}{\omega_M} = 2,2, \frac{\omega_a}{\omega_M} = 0,005$		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
№ опыта	0	0	1/3	1/3	1	1	0	1/3	1
Размагничивающий фактор (N_z)	$\langle 111 \rangle$	$\langle 100 \rangle$	$\langle 111 \rangle$	$\langle 100 \rangle$	$\langle 111 \rangle$	$\langle 100 \rangle$	$\langle 100 \rangle$	$\langle 100 \rangle$	$\langle 100 \rangle$
Ориентация намагниченности									
Интенсивные автоколебания	Есть	Нет	Есть	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть	Нет

На фазовой диаграмме (см. рис. 13) указаны точки, изображающие экспериментальные ситуации, приведенные в табл. III. Видно, что интенсивные автоколебания наблюдаются в тех и только тех случаях, когда

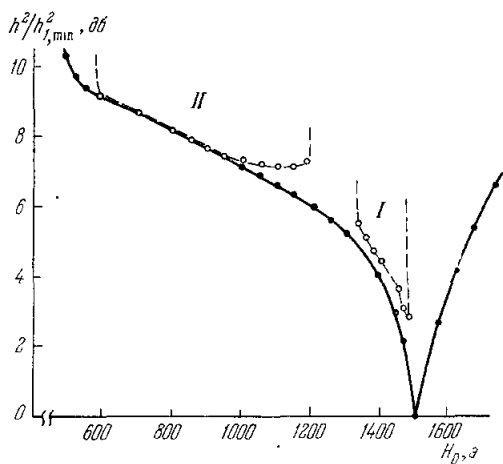


Рис. 15. Зависимость порога слабых автоколебаний от постоянного магнитного поля (сфера YIG, $M \parallel \langle 100 \rangle$).

изображающая точка попадает в область неустойчивости. Интересно, что точки № 2 и № 8 лежат вблизи границы неустойчивости и при небольшом изменении температуры пересекают эту границу. Например, для точки № 2 расчет показывает, что это происходит при $T \approx 330$ °К, экспериментально автоколебания возникают при $T \gtrsim 360$ °К.

Опыты, проведенные на установке с повышенной чувствительностью, показали наличие слабых автоколебаний в тех случаях, когда теория предсказывает неустойчивость для моды $m = -2$ и устойчивость для моды $m = 0$ ⁵⁵. На рис. 15 показана зависимость порога слабых автоколебаний от постоянного

магнитного поля в этой экспериментальной ситуации; видно, что эти автоколебания существуют в двух интервалах магнитных полей. Возникновение автоколебаний в области I объясняется естественным образом с помощью фазовой диаграммы, изображающей область неустойчивости $m = -2$ (см. рис. 14). На этой диаграмме показана траектория изображающей точки при изменении магнитного поля. Началь-

ная точка 0 , соответствующая $k = 0$ ($H = H_c$), лежит в устойчивой области. С уменьшением H волновое число увеличивается и траектория $0 \rightarrow I$ пересекает область устойчивости; теоретическая ширина области неустойчивости для YIG при комнатной температуре равна 350 э. Экспериментальная ширина области I на рис. 15 несколько меняется от формы и размера образца в пределах 150—250 э. С понижением температуры ширина этой области уменьшается, а при температурах, меньших 275 °К область I вообще исчезает. Это объясняется увеличением анизотропии и намагнитченности, приводящей к перемещению начальной точки на фазовой диаграмме вдоль линии 00 (см. рис. 14). Видно, что траектория, соответствующая изменению H при низких температурах, вообще не пересекает области неустойчивости моды $m = -2$.

Автоколебания в области II на рис. 15 имеют более сложную природу. Границы этой области совпадают с интервалом полей, в котором наблюдается жесткое параметрическое возбуждение спиновых волн, обусловленное отрицательным нелинейным затуханием (см. раздел 5). Условия возникновения этих автоколебаний проанализированы в работе ⁴⁸ с помощью кинетического уравнения.

В заключение надо сказать, что описанная в этом разделе простая теория автоколебаний предсказывает, что порог возникновения автоколебаний h_a совпадает с порогом параметрического возбуждения h_1 , а частота автоколебаний при $h = h_a$ равна нулю. В экспериментах же наблюдается конечный порог автоколебаний и ненулевая начальная частота. В монокристаллах YIG порог автоколебаний обычно равен $0,1 - 1$ дБ, а начальная частота не коррелирует с величиной порога и в зависимости от постоянного магнитного поля изменяется в пределах $10^4 - 10^5$ гц ^{37, 51}. Эти факты могут объясняться влиянием слабого нелинейного затухания, не изменяющим существенно величины χ' и χ'' , присутствием в кристаллах случайных неоднородностей ⁴⁹, отсутствием точной аксиальной симметрии, обратным влиянием образца на резонатор ⁵⁶ и т. п. Для выяснения относительного вклада этих механизмов необходимо дальнейшее теоретическое и экспериментальное изучение автоколебаний.

5. ДРУГИЕ ПРОБЛЕМЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ СПИНОВЫХ ВОЛН

а) Влияние случайных неоднородностей. Описанная в предыдущих разделах элементарная теория нелинейной стадии параметрического возбуждения волн (S -теория) является лишь первым, хотя и существенным, шагом на пути к пониманию явлений, происходящих в реальных кристаллах при параметрическом резонансе. В настоящее время получено уже довольно много результатов относительно влияния на параметрическое возбуждение волн факторов, не учтенных простой S -теорией. Эти результаты получены при помощи иногда довольно сложного формального аппарата и поэтому не могут быть изложены в нашем обзоре с той же полнотой, что и S -теория. Настоящий раздел посвящен краткому изложению этих результатов, главным образом теоретических. Экспериментальное изучение явлений, выходящих за рамки S -теории, только начинается.

Мы начнем с вопроса о влиянии на параметрическое возбуждение волн случайных магнитных неоднородностей.

За редким исключением, реальные ферромагнетики содержат разного рода магнитные неоднородности: беспорядочное распределение магнитных ионов по узлам кристаллической решетки, примеси, немагнитные включения, шероховатости поверхности, поликристалличность и т. п. Эти неоднородности, как известно, приводят к эффективному процессу двухмагн-

ной релаксации, при которой сохраняется частота и изменяется импульс магнонов. Природа магнитных неоднородностей и их влияние на ширину линии ферромагнитного резонанса исследовалась в большом числе работ (см. например, монографию Спаркса ⁵⁷ и работу Шлемана ⁵⁸). Роль неоднородностей при параметрическом возбуждении спиновых волн впервые рассматривалась Сулом ⁵⁹ и Шлеманом ⁶⁰ в случае неустойчивости однородной прецессии второго порядка. В этом случае частота однородной прецессии совпадает с частотой параметрических спиновых волн, и спиновые волны, возникающие в результате двухмагнонной релаксации однородной прецессии ($\omega_0 \rightarrow \omega_k$), вовлекаются также в четырехмагнонный параметрический процесс ($2\omega_0 \rightarrow \omega_k + \omega_{-k}$). Поэтому параметрические волны достигают значительного уровня возбуждения и оказывают эффективное обратное влияние на однородную прецессию еще до порога неустойчивости. Это явление приводит к «размытию» порога даже малым количеством неоднородностей.

В случае неустойчивости однородной прецессии первого порядка и для параллельной накачки параметрические спиновые волны имеют частоту, равную половине частоты накачки, и размытие порога не происходит. Это не означает, однако, что неоднородности в этой ситуации вообще не оказывают влияния на порог и поведение спиновых волн за порогом.

Вопросу о влиянии неоднородностей на параллельную накачку посвящено много экспериментальных работ ⁶¹. Эксперименты проводились в основном на поликристаллах. Они показали, в частности, значительное увеличение порога при уменьшении размера зерна до величины порядка длины параметрических волн. Для трактовки полученных результатов обычно использовались простые представления: порог параллельной накачки определялся по формуле

$$h_1 |V_k| = \gamma_k + \gamma_{k \text{ imp}}, \quad (5.1)$$

где γ_{imp} — декремент затухания спиновых волн, обусловленный их рассеянием на границах зерен; γ_k — затухание, обусловленное собственными процессами релаксации.

В монографии Спаркса ⁵⁷ содержится критика этой точки зрения, заключающаяся в следующем: двухмагнонные процессы не выводят энергию из системы параметрических волн, и поэтому условие баланса энергии для них даже в присутствии неоднородностей имеет прежний вид (2.22), в котором учитывается только собственное затухание γ_k . Влияние же неоднородностей заключается в том, что нормальными модами теперь являются не плоские волны, а некоторые их линейные комбинации, которые и возбуждаются под действием накачки. Для вычисления порога, очевидно, нужно усреднить условие баланса (2.22) по волнам, входящим в состав нормальной моды, имеющей минимальный порог. В наших обозначениях формула Спаркса для порога имеет вид

$$h_1 \int |V_\theta| N_\theta \sin \theta d\theta = \int \gamma_\theta N_\theta \sin \theta d\theta. \quad (5.2)$$

Она предсказывает слабую зависимость h_1 от концентрации неоднородностей. Действительно, в предельном случае сильно неоднородной среды параметрические волны равномерно заполняют всю резонансную поверхность $\omega_k = \omega_p/2$; из (5.2) следует

$$h_1 \int V_\theta \sin \theta d\theta = \int \gamma_\theta \sin \theta d\theta. \quad (5.3)$$

Подставляя для оценки $\gamma_\theta = \text{const}$ и V_θ из формулы (2.26) для изотропных ферромагнетиков, получим $h_1 = 3V/2\gamma$, т. е. увеличение порога по отношению к однородному случаю всего в 1,5 раза.

В работе ³⁴ задача о пороге параметрического возбуждения спиновых волн в среде со случайными неоднородностями была рассмотрена в приближении $\gamma_{\text{imp}} \ll \omega$ и было показано, что неоднородности не только размывают функцию распределения пар, но и нарушают жесткие фазовые корреляции внутри каждой пары: $\langle c_k c_k^* \rangle > \langle c_k c_{-k} \rangle$ (черта означает усреднение по ансамблю примесей). Это ослабляет взаимодействие спиновых волн с накачкой и приводит к дополнительному по сравнению с формулой Спаркса (5.2) увеличению порога. При малой концентрации примесей ($\gamma_{\text{imp}} \ll \gamma$) величина размытия $\Delta\theta \approx \sqrt{\frac{\gamma_{\text{imp}}}{\gamma}}$, а порог

$$h_1 V_1 \approx \gamma + \frac{\gamma_{\text{imp}}}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\gamma}{\gamma_{\text{imp}}} . \quad (5.4)$$

Логарифм в этой формуле возникает из-за того, что в этом пределе большую роль играет уход энергии с экватора из-за двухмагнного рассеяния.

При $\gamma_{\text{imp}} \gg \gamma$ распределение N_θ , очевидно, является изотропным; пороговая амплитуда определяется из выражения

$$h_1^2 \int_0^{\pi/2} V_\theta^2 \sin \theta d\theta = \gamma \gamma_{\text{imp}} . \quad (5.5)$$

Таким образом, величина h_1 в этом случае в $\sqrt{\gamma_{\text{imp}}/\gamma}$ больше, чем это следует из формулы (5.3), не учитывающей разрушения фазовой корреляции. При сравнении формул (5.4) и (5.5) с экспериментом следует иметь в виду, что они не применимы, если размер неоднородностей много больше длины спиновой волны.

В этой же работе ³⁴ в рамках S -теории изучено также запороговое поведение спиновых волн в ферромагнетике со случайными неоднородностями. Неоднородности приводят к увеличению стационарного уровня ограничения волн в $n_k b \gamma_{\text{imp}}/\gamma$. Этот эффект также объясняется ослаблением корреляции фаз в паре за счет двухмагнного рассеяния. Что касается величины σ_k , то она существенным образом не меняется, так как условие ограничения амплитуды при большой надкритичности $|p| \ll \ll hV$ сохраняется и в присутствии неоднородностей. Это приводит к тому, что нелинейные восприимчивости, определяемые формулами (2.33) и (2.34), оказываются мало чувствительными к концентрации неоднородностей. Серьезное сравнение выводов работы ³⁴ с экспериментом пока отсутствует.

б) З а р о ж д е н и е и т о н к а я с т р у к т у р а п а р а м е т р и ч е с к о й т у р б у л е н т н о с т и . Во всех реальных системах присутствуют тепловые флуктуации, и представляет большой интерес исследование вопроса об их поведении при параметрическом возбуждении волн. Очевидно, что при приближении к порогу неустойчивости уровень флуктуаций в системе возрастает. За порогом неустойчивости возможны, по крайней мере, два случая: либо флуктуации в области $\mathbf{k}$ -пространства, близкой к волновому вектору неустойчивости $\mathbf{k}_0$, вырастают до макроскопического уровня — в этом случае возникает пакет волн с некоторой шириной κ , либо устанавливается сингулярный по $\mathbf{k}$ режим, а флуктуации остаются замороженными на некотором уровне. Возникновение сингулярного режима можно сравнить с фазовым переходом второго рода, например, с конденсацией бозе-газа или с переходом в сверхпроводящее состояние.

Фазовый переход представляет собой перестройку состояния системы, обусловленную ее неустойчивостью при $T < T_1$, где T_1 — температура

перехода. При этом в системе возникает дальний порядок, причем параметр упорядочения зависит от температуры как $\sqrt{T_1 - T}$. При установлении стационарного спектра в виде одной угловой пары волн на фоне флуктуаций также возникает дальний порядок — фазовая когерентность волн, входящих в пару. Продолжая аналогию с фазовым переходом, можно сопоставить амплитуду пары с параметром упорядочения, температуру с мощностью накачки. Вблизи фазового перехода флуктуации также происходят сильное возрастание флуктуаций, и именно, поведение флуктуаций при $T \rightarrow T_1$ определяет, происходит или не происходит фазовый переход.

Опишем поведение флуктуаций при параметрическом возбуждении волн. Далеко до порога возбуждения ($\hbar V_k < \gamma_k$) флуктуации можно описывать в линейном приближении. Под действием поля накачки возникает отклонение функции распределения волн n_k от термодинамически равновесного значения n_k^0 :

$$\Delta n_k = n_k - n_k^0 = n_k^0 \frac{|\hbar V_k|^2}{[\omega_k - (\omega_p/2)]^2 + \nu_k^2}, \quad (5.6)$$

где

$$\nu_k^2 = \gamma_k^2 - |\hbar V_k|^2. \quad (5.7)$$

Формулу (5.6) можно трактовать как резонансный отклик системы, находящейся в условиях параметрической накачки, на случайную ланжевенговскую силу, характеризующую взаимодействие системы с термостатом. Таким образом, под действием накачки и случайной силы образуется пакет волн с максимумом при $\omega_k = \omega_p/2$ и шириной по собственным частотам, равной ν_k . Видно, что при $\hbar V_k \rightarrow \gamma_k$ ширина распределения $\nu_k \rightarrow 0$, а интегральная интенсивность флуктуаций, распространяющихся в данном направлении, растет как ν_Ω^{-1} (ν_Ω — значение ν_k на резонансной поверхности).

Поведение флуктуаций вблизи порога и при $\hbar V_k > \gamma_k$ должно описываться нелинейными уравнениями. В работе⁶² показано, что характер «фазового перехода» существенно зависит от величины δ — размерности распределения n_k в основном состоянии S -теории. При $\delta = 0$ волны расположены в паре точек, при $\delta = 1$ на линии (этот случай обычно реализуется в изотропных ферромагнетиках) и при $\delta = 2$ на поверхности в k -пространстве.

Возникшее при $\hbar > h_1$ сингулярное распределение параметрических волн изменяет декремент затухания флуктуаций в окрестности резонансной поверхности. Оказывается, что в приближении диагонального гамильтониана интенсивность флуктуаций по-прежнему определяется формулой (5.6), где ω_k теперь переходит в $\tilde{\omega}_k$ и $\hbar V_k$ в P_k . В линейном приближении по флуктуациям можно не учитывать их вклад в перенормировку частоты и накачки. Тогда ясно, что $\nu_\Omega = 0$ в тех точках резонансной поверхности, где отличны от нуля амплитуды параметрических волн. В окрестности этих точек

$$\Delta n_k \sim \frac{1}{V_g^2 \kappa_\parallel^2 + (1/2) \nu^2 \kappa_\perp^2}, \quad (5.8)$$

где V_g — групповая скорость, $\kappa_\perp$ и $\kappa_\parallel$ — отклонения волнового вектора $\mathbf{k}$ соответственно поперек и вдоль резонансной поверхности.

Размытие сингулярного распределения происходит, очевидно, в случаях $\delta = 2, 1$, когда интегральная интенсивность флуктуаций, определяемых формулой (5.8), обращается в бесконечность. Тогда эта формула не справедлива и нужно учитывать вклад флуктуаций в самосогласованную накачку и перенормировку частоты.

При $\delta = 2$ интеграл расходится как $1/\kappa_{||}$. Вычисления показывают ⁶², что при этом устанавливается лоренцовское распределение $n_{\mathbf{k}}$, ширина которого $\nu = \kappa_{||} V_g$ уменьшается с ростом надкритичности. В точке порога $\nu = \sqrt{\xi} \gamma$, где $\xi = (2\pi)^2 k_0^2 S n_{\mathbf{k}}^0 V_g^{-1}$ — малый параметр, характеризующий влияние тепловых флуктуаций; по порядку величины $\xi \approx (l_{k_0}) \left(\frac{T}{T_c} \right) \sim 10^{-2} - 10^{-3}$. Здесь l — постоянная решетки, T_c — температура Кюри. При не слишком малых превышениях $h - h_1 > h_1 \xi^2$

$$\frac{\nu}{\gamma} = \xi \frac{h_1}{\sqrt{h^2 - h_1^2}}.$$

При $\delta = 1$ расходимость тепловых флуктуаций носит логарифмический характер и ширина распределения ν имеет экспоненциальную малость ⁶². Интегральная интенсивность флуктуаций является конечной для одной пары ($\delta = 0$), и только в этом случае можно надеяться на возникновение сингулярного по $\mathbf{k}$ состояния в присутствии тепловых флуктуаций. Однако исследования показывают ^{62, 63}, что эти надежды не оправдываются, так как основное состояние, как правило, является неустойчивым по отношению к возбуждению пространственно-неоднородных коллективных колебаний. Нелинейная стадия развития этой неустойчивости будет описана в следующем пункте.

Необходимо сказать, что наряду с уширением по $\mathbf{k}$ функция распределения параметрических волн может иметь конечную спектральную ширину $\Delta\omega$. В приближении диагонального гамильтониана ³³

$$\Delta\omega = \frac{v_{\mathbf{k}}^2}{\gamma}.$$

Многочастотный характер параметрической турбулентности есть следствие того, что ланжевеновская случайная сила, откликом на которую, в сущности, и являются параметрические волны, имеет широкий спектр частот. Однако все это справедливо лишь до тех пор, пока можно не учитывать отброшенные недиагональные члены гамильтониана, которые, как показано в работе ³³, приводят к существенному изменению спектра случайной силы. А именно, кроме ланжевеновской случайной силы $f_L(\mathbf{k})$ с белым спектром, возникает дополнительная случайная сила $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \omega)$ с узким спектром шириной порядка спектральной ширины пакета параметрических волн $\Delta\omega$ и максимумом на частоте $\frac{\omega_p}{2}$; ее квадрат амплитуды пропорционален $SN^3/\Delta\omega$ (N — интегральная интенсивность параметрических волн). При некоторой критической амплитуде накачки

$$h^* - h_1 \approx h_1 \xi^{6/5} \left(\frac{\omega}{\gamma} \right)^{1/5} \approx 10^{-2} h_1$$

величина «собственно» шума f_s^2 сравнивается с величиной теплового шума f_L^2 . При $h \geq h^*$ система параметрических волн становится неустойчивой относительно «схлопывания» их спектра частот. Действительно, случайное уменьшение спектральной ширины пакета $\Delta\omega$ вызывает сужение спектра случайной силы f_s и рост ее амплитуды. Это усиливает уменьшение $\Delta\omega$, в результате чего сила f_s становится еще более «узкой и интенсивной» и т. д. Процесс сужения продолжается до тех пор, пока ширины распределений параметрических волн и спектра собственного шума не обратятся в нуль. Рассмотренный процесс не может идти в сторону уширения этих распределений, так как этому препятствует резонансный характер действия накачки.

Таким образом, при $h = h^*$ возникает явление типа фазового перехода — выпадение «конденсата»: на фоне описанной выше многочастотной параметрической турбулентности возникает новый пакет волн с тем же разбросом по $\mathbf{k}$, но колеблющийся на строго фиксированной частоте $\frac{\omega_p}{2}$. Исследование характера этого перехода представляется сложной задачей. Не исключено, что возникает фазовый переход первого рода, близкий ко второму, т. е. при $h = h^*$ одночастотная турбулентность возникает скачком, но величина этого скачка мала. При $h > h^*$ амплитуда одночастотной части турбулентности N_S увеличивается и быстро выходит на асимптотику, даваемую S -теорией:

$$SN_S \approx \sqrt{h^2 V^2 - \gamma^2},$$

а многочастотная часть быстро уменьшается и может рассматриваться как флуктуации на фоне одночастотной турбулентности. Спектральная ширина этих флуктуаций оказывается порядка

$$\Delta\omega = \frac{\gamma^2}{\gamma} \approx \gamma \left(\frac{\gamma}{k_0 V_g} \frac{h^2 - h_1^2}{h_1^2} \right)^{2/3}.$$

Здесь γ — ширина распределения по собственным частотам как многочастотной, так и одночастотной частей турбулентности.

Кроме флуктуаций на частотах, близких к $\frac{\omega_p}{2}$, существуют также флуктуации, обусловленные термическим возбуждением коллективных колебаний (см. п. а) раздела 4) и лежащие в области частот, отстоящих от $\frac{\omega_p}{2}$ на величину порядка $SN_S \gg \Delta\omega$.

Описанная здесь картина зарождения одночастотной турбулентности относится лишь к случаю, когда основное состояние устойчиво по отношению к возбуждению коллективных колебаний. В противном случае, как известно, возникают автоколебания, которые могут рассматриваться как гигантские флуктуации, разрушающие одночастотную турбулентность и приводящие к сильной многочастотной турбулентности со спектральной шириной порядка SN_S , совпадающей с шириной возбужденной в $\mathbf{k}$ -пространстве области.

в) Сильная турбулентность и самофокусировка узких пакетов параметрических волн. В этом пункте мы рассмотрим ситуацию, когда порог возбуждения минимален для единственной пары волн. Так происходит, например, при накачке спиновых волн однородной прецессией в случае неустойчивости второго порядка ($2\omega_k = 2\omega_p$) и при параллельной накачке в одноосных ферромагнетиках с анизотропией типа «легкая плоскость». Как следует из S -теории (см. ²⁰), в этом случае при надкритичностях, меньших второго порога, будет возбуждена монохроматическая стоячая волна, когерентная на размере всего кристалла. Такую волну можно использовать для усиления и возбуждения гиперзвука, для модуляции света и т. п. Однако для реализации одномодового режима необходимо прежде всего, чтобы он был устойчивым. В нераспадной части спектра основными процессами, приводящими к неустойчивости, являются четырехволновые процессы ^{62, 63}:

$$2\omega_{\pm k_0} = \omega_{\pm k_0 + \kappa} + \omega_{\pm k_0 - \kappa}, \quad (5.9)$$

$$\omega_{k_0} + \omega_{-k_0} = \omega_{k_0 + \kappa} + \omega_{k_0 - \kappa}. \quad (5.10)$$

Процесс (5.10) описывает взаимодействие пар и соответствует диагональному гамильтониану (3.4). Процесс (5.9) описывает неустойчивость одной

волны и ранее не учитывался на том основании, что в случае большого числа волн он имеет высокий порог из-за хаотизации индивидуальных фаз.

Инкремент неустойчивости процессов (5.9) и (5.10) существенно зависит от знаков коэффициентов гамильтониана S , T . Для устойчивости при малых κ требуется $S > 0$ и $T > 0$. Однако даже при соблюдении этих условий могут оказаться неустойчивыми возмущения с $\kappa \approx \kappa_0$, где

$$\omega''\kappa_0^2 = V(hV)^2 - \gamma^2. \quad (5.11)$$

Для устойчивости при этих κ необходимо дополнительно выполнить требование $0 < hV - \gamma \leq \gamma(\gamma/\omega)^2(S/T)^4$, выделяющее очень узкий интервал интенсивностей накачки h .

Нелинейная стадия развития неустойчивости одной пары изучалась в работах ⁶⁴, ⁶⁵. Принципиальной особенностью этой задачи является узость возбуждаемых в $\mathbf{k}$ -пространстве пакетов волн, что позволило сформулировать ее на языке волн огибающих. Простейшим вариантом нелинейного поведения системы является ее переход в одно из стационарных состояний, представляющих собой покоящуюся или движущуюся с постоянной скоростью периодическую волну модуляции $A(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$. Исследование устойчивости таких волн с малой глубиной модуляции дает основание полагать, что все стационарные состояния неустойчивы и поэтому нелинейное поведение системы будет существенно нестационарным. Такое состояние является сильно турбулентным; его можно представить как стохастическую суперпозицию волн огибающих, распространяющихся в основном в направлении, перпендикулярном к $\mathbf{k}_0$. Глубина модуляции порядка единицы, а характерная длина волны $\sim 1/\kappa_0$. Средний уровень возникающей турбулентности оказывается порядка амплитуды пары в S -теории. Картина модуляции существенно меняется за время порядка $1/\sqrt{(hV)^2 - \gamma^2}$.

На фоне этой турбулентности разыгрывается интересное явление — коллапс огибающих стоячей волны. Оказывается, что глубокие модуляции $A(\mathbf{r}, t)$ не рассасываются, а стягиваются таким образом, что амплитуда в центре пакета быстро возрастает и ограничивается нелинейным затуханием на уровне, значительно превышающем средний уровень турбулентности. Это явление можно сравнить с самофокусировкой света в нелинейной среде, приводящей в ряде случаев к схлопыванию пучка за конечное время ⁶⁶, ⁶⁷.

Вычисления на ЭВМ показывают ⁶⁵, что при малых надкритичностях схлопывающиеся области практически не образуются, а при $h \gg 3h_1$ коллапсирует почти каждый максимум амплитуды. Диссипация энергии в коллапсах приводит к эффективному нелинейному затуханию $\gamma(N) \approx \gamma + \eta N$, $\eta \approx |S|$.

Перспективным методом экспериментального изучения сильной турбулентности является измерение спектральной плотности электромагнитного излучения ферромагнетика на частотах, близких к ω_p и $\omega_p/2$. В отсутствие коллапсов спектральная ширина излучения $\sim \sqrt{(hV)^2 - \gamma^2}$; появление коллапсов сопровождается значительным уширением спектра излучения, по которому их, по-видимому, удобно регистрировать.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, изложенные в обзоре, показывают, что к настоящему времени достигнут значительный прогресс в понимании явлений, происходящих в ферромагнетиках при параллельной накачке спиновых волн. Физические представления, выработанные при изучении этих явлений, применимы к ряду других родственных проблем.

Прежде всего это относится к нелинейным явлениям при «поперечной» накачке спиновых волн, т. е. при параметрическом возбуждении спиновых волн однородной прецессией намагниченности. В простейшем случае неустойчивости первого порядка при ферромагнитном резонансе ($\omega_0 \approx \approx \omega_p = 2\omega_k$) основным нелинейным механизмом является обратное влияние спиновых волн на однородную прецессию²².

Вдали от резонанса явления при поперечной накачке в значительной мере похожи на явления при параллельной накачке. В работе²² показано, что взаимодействие волн друг с другом существенно уже при небольших надкритичностях. Важную роль здесь играют все три рассмотренных выше (см. п. д) раздела 3) механизма нелинейного затухания. В этой области получено большое число экспериментальных результатов, однако их детальное количественное сравнение с теорией затрудняется различными усложняющими обстоятельствами.

В частности, уже в линейном приближении вследствие зависимости γ от θ и $|\mathbf{k}|$ труден вопрос о том, какие волны возбуждаются в первую очередь.

Для неустойчивости второго порядка, $\omega_0 \approx \omega_p = \omega_k$, кроме перечисленных факторов, весьма существенную роль играет двухмагнотное рассеяние, которое нужно учитывать одновременно с взаимодействием пар. При больших превышениях над порогом здесь наблюдаются пока непонятные явления — например, «провал» на резонансной кривой⁶⁸.

Явления при параметрическом возбуждении спиновых волн в антиферромагнетиках в принципе богаче из-за наличия нескольких ветвей спектра.

Наибольший интерес представляют кубические антиферромагнетики со слабой анизотропией и одноосные типа «легкая плоскость», исследованные Сиви⁶⁹, Боровиком-Романовым и Прозоровой⁷⁰, Ожогиним⁷¹. В работах^{72, 73} показано, что все представления S -теории в полной мере применимы и к антиферромагнетикам. Интерпретация результатов эксперимента затрудняется тем, что в типичной экспериментальной ситуации в антиферромагнетиках большую роль играют дефекты⁷³.

Интересный и важный круг задач связан с изучением параметрического возбуждения волн в средах крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями. В этом случае имеется дополнительный «линейный» механизм ограничения за счет выноса энергии в области с более высоким порогом. Этот механизм детально изучен применительно к волнам в плазме⁷⁴. Необходимо отметить также интересное явление параметрического эха, наблюдаемое при поперечной накачке в слабо неоднородном ферромагнетике. Качественное объяснение этого явления дано в работе⁷⁵. Интересно выяснить роль взаимодействия волн при мощных коротких импульсах накачки. Изучение этого круга вопросов, по-видимому, может иметь практический выход (усилители, линии задержки с усилением и другие устройства для обработки импульсов).

Изложенная в настоящем обзоре теория имеет значение, выходящее за рамки проблем ферромагнетизма, и является, в сущности, общей теорией параметрического возбуждения волн в нелинейных средах с нераспадным спектром. В частности она применима к некоторым задачам физики плазмы⁷⁶, ее можно использовать также для изучения параметрического возбуждения волн на поверхности жидкости. Можно высказать надежду, что эта теория отражает многие существенные черты турбулентности, устанавливающейся в неустойчивой непрерывной среде при не слишком большой надкритичности.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН 103, 193 (197).
2. Рэлей, Теория звука, т. I—II, М., Гостехиздат, 1955.
3. N. Bloembergen, R. Damon, Phys. Rev. 85, 699 (1952); N. Bloembergen, S. Wang, *ibid.* 93, 72 (1954).
4. H. Sühl, Phys. Chem. Sol. 1, 209 (1957).
5. F. R. Morgentaller, J. Appl. Phys. 31, 955 (1960).
6. E. Schloman, J. Green, V. Milano, *ibid.*, p. 3865.
7. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ 32, 1291 (1962).
8. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, М., «Мир», 1966.
9. В. П. Силин, УФН 104, 677 (1971).
10. И. Е. Андреев, А. Н. Кирий, В. П. Силин, ЖЭТФ 57, 1024 (1969).
11. В. Е. Захаров, ЖЭТФ 51, 1107 (1966).
12. В. Е. Захаров, Ж. ПМТФ, № 2, 80 (1968).
13. T. V. Bengtsson, I. E. Feig, J. Fluid, Mech. 27, 417 (1967).
14. Д. Уизем, сборник «Нелинейная теория распространения волн», М., «Мир», 1970.
15. F. Bertaut, F. Forrat, C.R. Ac. Sci. 242, 382 (1956).
16. S. Geller, M. A. Gilleo, Acta Cryst. 10, 239 (1957).
17. E. Schloman, Phys. Rev. 116, 829 (1959).
18. J. D. Bierlein, P. Richards, *ibid.* B1, 4342 (1970).
19. В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец, ФТТ 11, 2047 (1969).
20. В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец, ЖЭТФ 59, 1200 (1970).
21. В. Е. Зауткин, В. С. Львов, С. Л. Мушер, С. С. Старобинец, Письма ЖЭТФ 14, 310 (1971).
22. В. С. Львов, С. С. Старобинец, ФТТ 13, 523 (1971).
23. В. Е. Зауткин, В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. Л. Мушер, С. С. Старобинец, ЖЭТФ 62, 782 (1972).
24. В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. Л. Мушер, ФТТ 14, 832 (1972).
25. T. S. Hartwick, E. R. Peressini, M. T. Weiss, J. Appl. Phys. 32, 223 (1961).
26. В. С. Львов, С. Л. Мушер, С. С. Старобинец, ЖЭТФ 64, 1084 (1973).
27. В. В. Зауткин, В. С. Львов, С. С. Старобинец, ЖЭТФ 63, 182 (1972).
28. H. Le Gall, B. Lemire, D. Sere, Sol. State Comm. 919 (1967).
29. В. В. Кведер, Б. Я. Котюжанский, Л. А. Прозорова, ЖЭТФ 63, 2205 (1972).
30. T. Halstein, N. Primakoff, Phys. Rev. 58, 1098 (1940).
31. А. Ахизер, В. Барьяхтар, С. Пелетминский, Спиновые волны, М., «Наука», 1967.
32. В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец, ФТТ 11, 2924 (1969).
33. В. С. Львов, Препринт ИЯФ СО АН СССР 7-73, Новосибирск, 1973.
34. В. Е. Захаров, В. С. Львов, ФТТ 14, 2913 (1972).
35. E. Schloman, J. Appl. Phys. 33, 527 (1962).
36. P. Gottlieb, H. Sühl, *ibid.*, p. 1508.
37. Я. А. Моносов, Нелинейный ферромагнитный резонанс, М., «Наука», 1971.
38. Г. А. Мелков, ЖЭТФ 61, 373 (1971).
39. T. Kohane, E. Schloman, J. Appl. Phys. 34, 1554 (1963).
40. А. В. Васьковский, Я. А. Моносов, Радиотехн. и электрон. 12, 1392 (1967); И. А. Дерюгин, Н. И. Ляшенко, Л. Л. Стахурский, *ibid.* 14, 1514 (1969).
41. H. Le Gall, J. P. Jamet, V. Sagan, Sol. State Comm. 7, 27 (1969); J. Appl. Phys. 40, 1505 (1969).
42. В. Н. Агартанов, В. Б. Антипов, В. В. Колпаков, Е. М. Федорин, ФТТ 14, 2446 (1972); В. Н. Агартанов, Е. М. Федорин, *ibid.* 15 (10) (1973).
43. А. Г. Гуревич, Г. М. Драбкин, И. М. Лазебник, Е. И. Мальцев, И. И. Марчик, С. С. Старобинец, *ibid.* 10, 647 (1968).
44. Л. Д. Ландау, Сб. трудов, т. I, М., «Наука», 1969, стр. 447.
45. Г. А. Петровский, В. Н. Бержанский, Письма ЖЭТФ 12, 429 (1970).
46. Я. А. Моносов, В. В. Сурия, ЖЭТФ 65 (1973).
47. J. J. Green, B. J. Nealy, J. Appl. Phys. 34, 1285 (1963).
48. В. С. Львов, Препринт ИЯФ СО АН СССР, 69-72, Новосибирск, 1972.
49. В. С. Львов, Препринт ИЯФ СО АН СССР 73, Новосибирск, 1973.
50. W. E. Courtney, P. I. Clariats, J. Electron, and Contr. 16 (1), 1 (1964).
51. В. В. Сурия, Канд. диссертация (ИРЭ АН СССР, 1969).

52. А. П. Сафьянтьевский. Канд. диссертация (ИРЭ АН СССР, 1971).
 53. S. Wang, G. Thomas, Ta-Lin Hsu, J. Appl. Phys. 39, 2719 (1968); S. Wang, Ta-Lin Hsu, Appl. Phys. Lett. 16, 534 (1970).
 54. J. J. Green, E. Schloman, *ibid.* 33, 1358 (1962).
 55. В. В. Зауткин, С. С. Старобинец, ФТТ 16 (1974).
 56. В. Е. Шапиро, И. П. Шапцев, Р. Г. Хлебопрос, Препринт ИФ СО АН СССР № 19, Красноярск, 1970.
 57. M. Sparks, Ferromagnetic Relaxation Theory, N.Y., 1964.
 58. E. Schloman, Phys. Rev. 182, 632 (1969).
 59. H. Suhl, J. Appl. Phys. 30, 1961 (1959).
 60. E. Schloman, Phys. Rev. 116, 828 (1959).
 61. A. Palacino, J. Waugh, J. Green. J. Appl. Phys. 37, 3337 (1966). Q. H. F. Vrechen, J. Appl. Phys. 40, 1849 (1969); G. E. Patton, J. *ibid.* 41, 1637 (1970); D. E. Scotter, *ibid.* 42, 4088 (1971).
 62. В. Е. Захаров, В. С. Львов, ЖЭТФ 60, 2066 (1971).
 63. В. С. Львов, ФТТ 13, 3488 (1971).
 64. В. С. Львов, А. М. Рубенчик, Препринт ИЯФ СО АН СССР 1-72, Новосибирск, 1972.
 65. В. С. Львов, А. М. Рубенчик, В. В. Соболев, В. С. Сынах, ФТТ 15, 793 (1973).
 66. В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынах, Письма ЖЭТФ 14, 564 (1971).
 67. В. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. вузов (Радиофизика) 14, 1353 (1971).
 68. А. Г. Гуревич, С. С. Старобинец, 39, 1075 (1968).
 69. M. H. Seavey, Phys. Rev. Lett. 23, 132 (1969).
 70. Л. А. Прозорова, А. С. Боровик-Романов, Письма ЖЭТФ 10, 316 (1969).
 71. В. И. Ожогин, ЖЭТФ 48, 1307 (1965); 58, 2079 (1970).
 72. В. А. Коланов, В. С. Львов, М. И. Широков, Письма ЖЭТФ 19, 680 (1974).
 73. В. С. Львов, М. И. Широков, Препринт ИАПЭ СО АН СССР № 14, Новосибирск, 1974.
 74. M. N. Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. 29, 565 (1972).
 75. G. E. Hegman, R. M. Hill, D. E. Kaplan, Phys. Rev. B2, 2587 (1970).
 76. В. С. Львов, А. М. Рубенчик, ЖЭТФ 64, 515 (1973).
-